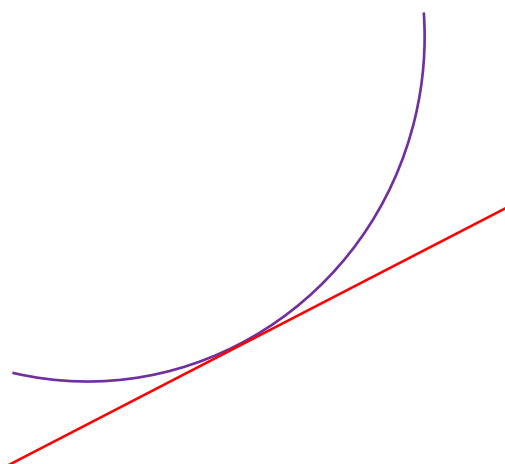


חשבון
דיפרנציאלי
ואינטגרלי
I



גיא סלומון

סטודנטים יקרים

ספר תרגילים זה הינו פרי שנות ניסיון רבות של המחבר בהוראת חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי באוניברסיטת תל אביב, באוניברסיטה הפתוחה, במכללת שנקר ועוד.

שאלות תלמידים וטעויות נפוצות וחוזרות הולידו את הרצון להאיר את הדרך הנכונה לעומדים בפני קורס חשוב זה.

הספר עוסק בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1 (חדו"א 1) והוא מתאים לתלמידים במוסדות להשכלה גבוהה – אוניברסיטאות או מכללות.

הספר מסודר לפי נושאים ומכיל את כל חומר הלימוד, בהתאם לתוכניות הלימוד השונות. הניסיון מלמד כי לתרגול בקורס זה חשיבות יוצאת דופן, ולכן ספר זה בולט בהיקפו ובמגוון התרגילים המופיעים בו.

לכל התרגילים בספר פתרונות מלאים באתר www.GooL.co.il הפתרונות מוגשים בסרטוני פלאש המלווים בהסבר קולי, כך שאתם רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי שנעשה בשיעור פרטי. הפתרון המלא של השאלה מכוון ומוביל לדרך חשיבה נכונה בפתרון בעיות דומות מסוג זה.

לדוגמאות: www.GooL.co.il/hedva1.html

תקוותי היא, שספר זה ישמש מורה-דרך לכם הסטודנטים ויוביל אתכם להצלחה.

גיא סלומון



תוכן

4	פרק 1 - פונקציה ממשית.....
6	פרק 2 - גבול של פונקציה.....
10	פרק 3 - רציפות של פונקציה, משפט ערך הביניים.....
13	פרק 4 - גזירות של פונקציה, הגדרת הנגזרת.....
16	פרק 5 - חישוב נגזרת של פונקציה.....
19	פרק 6 - חישוב נגזרת של פונקציות מיוחדות.....
21	פרק 7 - בעיות משיקים.....
23	פרק 8 - כלל לופיטל.....
24	פרק 9 - חקירת פונקציה.....
31	פרק 10 - חקירת פונקציה ("שאלות מסביב" והוכחת אי שוויונים).....
33	פרק 11 - מינימום ומקסימום מוחלטים לפונקציה.....
34	פרק 12 - פתרון משוואות (משפט ערך הביניים, משפט רול, משפט ניוטון רפסון).....
35	פרק 13 - בעיות מקסימום ומינימום.....
46	פרק 14 - בעיות קצבי שינוי.....
51	פרק 15 - האינטגרל הלא מסוים (אינטגרל מיידי).....
52	פרק 16 - האינטגרל הלא מסוים (הנגזרת כבר בפנים).....
53	פרק 17 - האינטגרל הלא מסוים (אינטגרציה בחלקים).....
62	פרק 18 - אינטגרלים מיידיים.....
55	פרק 19 - האינטגרל הלא מסוים (פונקציות רציונאליות).....
56	פרק 20 - האינטגרל הלא מסוים (אינטגרלים טריגונומטריים והצבות טריגונומטריות).....
59	פרק 21 - שימושי אינטגרל המסוים.....
62	פרק 22 - שימושי אינטגרל המסוים (שטח ואורך קשת).....
69	פרק 23 - שימושי אינטגרל המסוים (נפח גוף סיבוב, שטח מעטפת של גוף סיבוב ונפח).....
71	פרק 24 - גזירת האינטגרל.....
72	פרק 25 - פונקציות של מספר משתנים, גבולות ורציפות.....
75	פרק 26 - נגזרות חלקיות, דיפרנציאביליות.....
79	פרק 27 - כלל השרשרת לפונקציה של מספר משתנים.....
81	פרק 28 - נגזרת מכוונת וגרדיאנט.....
84	פרק 29 - פונקציות סתומות, מערכת של פונקציות סתומות, שימושים גיאומטריים.....
87	פרק 30 - נוסחת טיילור של פונקציה בשני משתנים, הדיפרנציאל השלם.....
89	פרק 31 - קיצון של פונקציה בשני משתנים (רמה רגילה).....
91	פרק 32 - קיצון של פונקציה של שניים/שלושה משתנים (רמה מתקדמת).....

93	פרק 33 - קיצון תחת אילוץ של פונקציה של שני משתנים (כופלי לגרנג')
96	פרק 34 - קיצון תחת אילוצים של פונקציה של שלושה משתנים (כופלי לגרנג')
99	פרק 35 - קיצון מוחלט של פונקציה רציפה בקבוצה סגורה וחסומה
100	נספח - דפי נוסחאות

פרק 1**פונקציה ממשית**

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

$$y = \frac{4x+1}{x^2+1} \quad (3) \quad y = \frac{1}{x^2-4} \quad (2) \quad y = x^3 - x^2 - 4x + 1 \quad (1)$$

$$y = \sqrt{x-4} \quad (6) \quad y = \frac{x^2}{x^2-x-2} \quad (5) \quad y = \frac{1}{x^3-x} \quad (4)$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{1-|x|}} \quad (9) \quad y = \sqrt[3]{x^2+x-1} \quad (8) \quad y = \sqrt{x^2+x-2} \quad (7)$$

$$y = e^{x^2+x+1} \quad (12) \quad y = \log x + \frac{1}{\log x} \quad (11) \quad y = \ln(x^2+x-2) \quad (10)$$

$$y = \cot(4x) \quad (15) \quad y = \tan(10x) \quad (14) \quad y = \log_x(x+4) \quad (13)$$

$$y = \arccos(x+1) \quad (18) \quad y = \arcsin(x-4) \quad (17) \quad y = \arctan(x+4) \quad (16)$$

$$(2) \text{ נתונות הפונקציות הבאות: } h(x) = \frac{4}{x}, \quad g(x) = x^2, \quad f(x) = x-4$$

חשב את הפונקציות המורכבות הבאות:

$$(1) f(g(1)) \quad (2) h(g(f(5))) \quad (3) f(g(x)) \quad (4) h(f(x)) \quad (5) f(f(x)) \quad (6) h(h(x))$$

(3) בתרגילים הבאים הוכח שהפונקציה הנתונה היא חח"ע בתחום הגדרתה ומצא את הפונקציה ההפוכה לה. בנוסף מצא את התמונה של הפונקציה.

$$(1) f(x) = \frac{x-1}{3} \quad (2) f(x) = \frac{x+1}{x} \quad (3) f(x) = \frac{3x-2}{x-2} \quad (4) f(x) = x^2 - 4 \quad (x \geq 0)$$

(4) מצא איזה מבין הפונקציות הבאות הן אי זוגיות ואיזה זוגיות:

$$(1) y = 4x^3 \quad (2) y = x^4 + x^{10} \quad (3) y = 1 \quad (4) y = \frac{1}{x}$$

$$(5) y = x^2 + \sin^2 x \quad (6) y = 2^x \quad (7) y = \ln x + x^2 \quad (8) y = \sin x \cdot \cos x$$

(5) מצא את המחזור של כל אחת מהפונקציות הבאות:

$$(1) y = 2 \sin x \quad (2) y = 5 + 3 \sin(4x+1) \quad (3) y = \tan \frac{x}{3} \quad (4) y = \sin^2 x$$

(6) רשום כל אחת מהפונקציות הבאות כפונקציה מפוצלת* ושרטט את גרף הפונקציה.

$$(1) y = |x-2| \quad (2) y = 3|x+1| \quad (3) y = x^2 + 2|x-1| \quad (4) y = \frac{|x|}{x}$$

* יש הקוראים לפונקציה "מפוצלת", פונקציה "מוטלאת" או פונקציית "תפר" או פונקציה "לפי מקרים".

פתרונות

(1)

$$\begin{array}{lllll}
 x \neq 2, -1 \quad (5) & x \neq 0, 1, -1 \quad (4) & x \text{ כל } (3) & x \neq \pm 2 \quad (2) & x \text{ כל } (1) \\
 x < -2 \text{ או } x > 1 \quad (10) & -1 < x < 1 \quad (9) & x \text{ כל } (8) & x \leq -2 \text{ או } x \geq 1 \quad (7) & \text{פרק } (35) \\
 & & & & x \geq 4 [\\
 x \neq \frac{\pi}{4} \cdot k \quad (15) & x \neq \frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{10} k \quad (14) & 0 < x \neq 1 \quad (13) & x \text{ כל } (12) & 0 < x \neq 1 \quad (11) \\
 & & -2 < x < 0 \quad (18) & 3 < x < 5 \quad (17) & x \text{ כל } (16)
 \end{array}$$

(2)

$$\begin{array}{llllll}
 x \quad (6) & x - 8 \quad (5) & \frac{4}{x-4} \quad (4) & x^2 - 4 \quad (3) & 4 \quad (2) & -3 \quad (1)
 \end{array}$$

(3)

$$\begin{array}{llll}
 y \neq 3, f^{-1}(x) = \frac{2x-2}{x-3} \quad (3) & y \neq 1, f^{-1}(x) = \frac{1}{x-1} \quad (2) & y \text{ כל}, f^{-1}(x) = 3x+1 \quad (1) & \\
 & & & , f^{-1}(x) = \sqrt{x+4} \quad (4) \\
 & & & y \geq -4
 \end{array}$$

(4)

זוגיות – 2,3,5,8 אי זוגיות – 1,4 כלליות – 6,7

(5)

$$\begin{array}{llll}
 \pi \quad (4) & 3\pi \quad (3) & \frac{\pi}{2} \quad (2) & 2\pi \quad (1)
 \end{array}$$

(6)

$$y = \begin{cases} 3x+3 & x \geq -1 \\ -3x-3 & x < -1 \end{cases} \quad (2) \qquad y = \begin{cases} x-2 & x \geq 2 \\ 2-x & x < 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$y = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \quad (4) \qquad y = \begin{cases} x^2 + 2x - 2 & x \geq 1 \\ x^2 - 2x + 2 & x < 1 \end{cases} \quad (3)$$

פרק 2

גבול של פונקציה

(1) חשב את הגבולות הבאים (הצבה):

$$\lim_{x \rightarrow 100} 20 \quad (4) \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x+3} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow 10} \frac{x+1}{x+2} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 4} x^2 + x + 1 \quad (1)$$

(2) חשב את הגבולות הבאים (צמצום/פירוק לגורמים):

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - x}{x-1} \quad (4) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^7 - x}{x-1} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 - 50}{2x^2 + 3x - 35} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} \quad (1)$$

(3) חשב את הגבולות הבאים (כפל בצמוד):

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + x + 2} - 2}{x^2 - 1} \quad (4) \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3 - \sqrt{x+6}}{2x-6} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1-x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1-x} \quad (7) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{3x+1}}{1 - \sqrt{2x-1}} \quad (6) \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+5}}{x-4} \quad (5)$$

(4) חשב את הגבולות הבאים (היעזר בגבול הטריגונומטרי $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x}{\sin 2x} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(4x)} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{4x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{\cos x}}{x} \quad (6) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \quad (5) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2} \quad (9) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x - \sin 3x}{x^3} \quad (8) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4} \quad (7)$$

(5) חשב את הגבולות הבאים (פונקציה השואפת לאינסוף):

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{(x-2)(x-5)} \quad (4) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2}{(2-x)^2} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)^2}{x-2} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 4}{x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} \quad (8) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} ((\ln x)^2 + 2 \ln x - 3) \quad (7) \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} -\frac{1}{2} \ln(2-x) \quad (6) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \cdot \cot x \quad (12) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (11) \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (10) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (9)$$

(6) חשב את הגבולות הבאים (x שואף לאינסוף) :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 2}{x^2 + 1000x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x + e^x \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-x})^{\ln x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} - \frac{x}{2} \right) \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^5 + 10x} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^3 + 10x} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^6 - 5x}}{x^3 - 2x^2 + 1} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16^x + 4^{x+1}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (12)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-3}}{\sqrt{4x+1} - \sqrt{5x-1}} \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^4 + 2x^2 + 6 + 27x^6}}{\sqrt{3x^3 + 10x + 4x^4}} \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 9^x + 3^{x+1}}{81^{0.5x} + 3^{x+3}} \quad (15)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 9^x + 3^{x+1}}{81^{0.5x} + 3^{x+3}} \quad (14)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{16^x + 4^{x+1}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (13)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^4 + 10x}} \quad (18)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{3x^3 - 5x - 1}{x^3 - 2x^2 + 1} \right) \quad (17)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4x^2 + 2}{x^2 + 1000x}} \quad (16)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 5x} - x) \quad (21)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[5]{\frac{ax+1}{bx+2}} \quad (20)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin \left(\frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^5 + 10x} \right) \quad (19)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + x) \quad (24)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x) \quad (23)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + kx} - x) \quad (22)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 + bx}) \quad (26)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^4 + x^2 + 1} - x^2) \quad (25)$$

(7) חשב את הגבולות הבאים (העזר בגבול של אוילר $e = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}$) :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x} \right)^x \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)^x \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x} \right)^x \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x-3} \right)^x \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x^2} \right)^{x^2-1} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \tan \frac{1}{x} \right)^x \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 4x + 1}{x^2 + 2x + 2} \right)^{10x} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x + 4} \right)^{4x^2} \quad (7)$$

(8) חשב את הגבולות הבאים (ע"י שימוש בכלל הסנדוויץ'): :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + \sin x}{4x + \cos x} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos(2x+1)}{x} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \cos(\ln x^2) \quad (6) \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad (5) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + x + \sin 2x}{x^2 + \cos 3x} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} [x] \quad (9) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{2^x + 3^x + 4^x} \quad (8) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + \arctan(2x-3)}{4x + \arctan(x - \ln x)} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} [x] \quad (10)$$

(9) חשב את הגבול $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ של הפונקציות הבאות (גבול של פונקציה מפורצלת): :

$$(a=1) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x-1} & x > 1 \\ \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} & x < 1 \end{cases} \quad (2) \quad (a=0) f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 4x}{x} & x > 0 \\ 4 + e^{\frac{1}{x}} & x < 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$(a=\infty) f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (4) \quad (a=0) f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (3)$$

$$(a=-\infty) f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (5)$$

הערה חשובה מאוד !

במרבית קורסי החדו"א לומדים בהמשך את כלל לופיטל לחישוב גבולות (ראה פרק 8). בעזרת כלל זה ניתן לחשב ללא מאמץ את הגבולות המופיעים בשאלות 2, 3 ו-4.

פתרונות

									(1)
						40 (4	2 (3	$\frac{11}{12}$ (2	21 (1
									(2)
						$n-1$ (4	6 (3	$\frac{10}{8.5}$ (2	$\frac{5}{6}$ (1
									(3)
		$\frac{1}{3}$ (7	$\frac{3}{4}$ (6	$\frac{1}{6}$ (5	$\frac{3}{8}$ (4	$\frac{-1}{12}$ (3	4 (2	$\frac{1}{2}$ (1	(4)
1 (9	4 (8	$\frac{1}{8}$ (7	$\frac{1}{2}$ (6	$\frac{1}{2}$ (5	$\frac{1}{2}$ (4	$\frac{1}{2}$ (3	$\frac{3}{4}$ (2	$\frac{3}{4}$ (1	(5)
0 (9	ϕ (8	∞ (7	∞ (6	$-\infty$ (5	ϕ (4	$-\infty$ (3	ϕ (2	ϕ (1	(6)
						$-\infty$ (12	ϕ (11	1 (10	(7)
-3 (9	-1 (8	1 (7	-5 (6	0 (5	$-\infty$ (4	4 (3	$-\frac{\pi}{2}$ (2	0 (1	(8)
$e^{\frac{1}{3}}$ (18	$\ln 3$ (17	2 (16	$\frac{1}{9}$ (15	4 (14	0 (13	0.25 (12	$\frac{1-\sqrt{3}}{2-\sqrt{5}}$ (11	1.5 (10	(9)
	$\frac{a-b}{2}$ (26	1/2 (25	-1/2 (24	1/2 (23	$k/2$ (22	2.5 (21	(**) (20	0 (19	(10)
e (9	e^{30} (8	e^{-12} (7	e (6	e^3 (5	e^{-1} (4	e^2 (3	1 (2	$e^{\frac{1}{2}}$ (1	(11)
1 (9	4 (8	0.75 (7	0 (6	0 (5	3 (4	0.75 (3	0 (2	0 (1	(12)
								0 (10	(13)
									(14)
									(15)
									(16)
									(17)
									(18)
									(19)
									(20)
									(21)
									(22)
									(23)
									(24)
									(25)
									(26)
									(27)
									(28)
									(29)
									(30)
									(31)
									(32)
									(33)
									(34)
									(35)
									(36)
									(37)
									(38)
									(39)
									(40)
									(41)
									(42)
									(43)
									(44)
									(45)
									(46)
									(47)
									(48)
									(49)
									(50)
									(51)
									(52)
									(53)
									(54)
									(55)
									(56)
									(57)
									(58)
									(59)
									(60)
									(61)
									(62)
									(63)
									(64)
									(65)
									(66)
									(67)
									(68)
									(69)
									(70)
									(71)
									(72)
									(73)
									(74)
									(75)
									(76)
									(77)
									(78)
									(79)
									(80)
									(81)
									(82)
									(83)
									(84)
									(85)
									(86)
									(87)
									(88)
									(89)
									(90)
									(91)
									(92)
									(93)
									(94)
									(95)
									(96)
									(97)
									(98)
									(99)
									(100)

(**) בשאלה 6 תרגיל 20 יש להפריד לשלושה מקרים:

$$\lim = \sqrt[5]{\frac{a}{b}} \Leftarrow b \neq 0 \text{ (I)}$$

$$\lim = \infty \Leftarrow a > 0, b = 0 \text{ (II)}$$

$$\lim = -\infty \Leftarrow a < 0, b = 0 \text{ (III)}$$

פרק 3**רציפות ומשפט ערך הביניים****רציפות**

(1) בדוק את רציפות הפונקציות הבאות ב"נקודת התפר" שלהן :
(בסעיפים 3 ו-4 שרטט את גרף הפונקציה).

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x > 0 \\ 2 & x = 0 \\ 1 + e^{\frac{1}{x}} & x < 0 \end{cases} \quad (2) \qquad f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 4x}{x} & x > 0 \\ 4 + e^{\frac{1}{x}} & x < 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 1 \\ x^2 & x < 1 \end{cases} \quad (4) \qquad f(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 2 \\ 5-x & x > 2 \end{cases} \quad (3)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \leq 1 \\ |x-2| & 1 < x < 2 \\ 1 & x = 2 \\ x-2 & x > 2 \end{cases} \quad (6) \qquad f(x) = \begin{cases} \sin x & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 2-x & 1 \leq x < 2 \\ x-3 & x \geq 2 \end{cases} \quad (5)$$

* נקודת התפר היא הנקודה בה נוסחת הפונקציה משתנה.

למשל, נקודת התפר בתרגיל 1 היא $x = 0$.

(2) מה צריך להיות הערך של הקבוע k על מנת שהפונקציות הבאות תהינה רציפות לכל x :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 3}{x-1} & x \neq 1 \\ k & x = 1 \end{cases} \quad (2) \qquad f(x) = \begin{cases} kx^2 + x - 2 & x \leq 2 \\ 5kx - 6 & x > 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x - k & x \leq 0 \\ x^{2x} & x > 0 \end{cases} \quad (4) \qquad f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x-2} & x \neq 2 \\ k & x = 2 \end{cases} \quad (3)$$

הערה: על סעיף 4 תוכל לענות רק אחרי שתלמד את כלל לופיטל (פרק 8).

(3) מה צריך להיות הערך של הקבועים a ו- b על מנת שהפונקציות הבאות תהינה רציפות

בתחום הגדרתן :

$$f(x) = \begin{cases} a\sqrt[3]{x} + x^2 & x < -1 \\ bx^2 + x - 1 & -1 \leq x \leq 1 \quad (2) \\ \frac{4\sqrt{x-1+a} - \sqrt{a}}{\sqrt{a}(x-1)} & x > 1 \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} ax + b & x \leq 0 \\ \frac{\sin x}{2x} & 0 < x < \pi \quad (1) \\ a \cos x & x \geq \pi \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{1-x}}} & x < 1 \\ ax^2 + b & 1 \leq x \leq 2 \quad (4) \\ (x-1)^{\frac{1}{x-2}} & x > 2 \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^{1-x}} & x > 1 \\ (x-1)\ln(x+1) + b & 0 \leq x \leq 1 \\ a \frac{2^x - 2}{2^x + 4} & x < 0 \end{cases} \quad (3)$$

הערה: על סעיפים 3 ו-4 תוכל לענות רק אחרי שתלמד את כלל לופיטל (פרק 8).

(4) עבור כל אחת מהפונקציות בשאלה (1) רשום עבור כל נקודת אי רציפות מאיזה סוג היא.

(5) הוכח או הפרך:

1. סכום שתי פונקציות לא רציפות הוא פונקציה לא רציפה.
 2. הפרש שתי פונקציות לא רציפות הוא פונקציה לא רציפה.
 3. מכפלת שתי פונקציות לא רציפות היא פונקציה לא רציפה.
 4. מנתן של שתי פונקציות לא רציפות היא פונקציה לא רציפה.
- (6) ידוע ש- f רציפה ו- g לא רציפה. האם $f + g$ רציפה? הוכח את טענתך.

משפט ערך הביניים (של קושי)

(7) צטט את משפט ערך הביניים של קושי והסבר אותו גרפית.

(8) הוכח שלמשוואות הבאות יש לפחות פתרון אחד:

$$x - 0.25 \sin x = 7 \quad (3) \quad x^2 = -\ln x \quad (2) \quad x^3 + 4x - 1 = 0 \quad (1)$$

(9) הוכח שלמשוואה $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$ יש לפחות פתרון אחד.

(10) הוכח שלמשוואות הבאות יש לפחות שני פתרונות:

$$4x^3 + 5x - \frac{1}{x} = 0 \quad (2) \quad e^x - 5x = 0 \quad (1)$$

(11) תהי f פונקציה רציפה לכל x המקיימת: $f(0) = 1, f(1) = 2$.

הוכח שלמשוואה $f(x) + \sin x = 4x$ יש לפחות פתרון אחד.

(12) מצא קטע שאורכו אינו עולה על יחידה אחת בו למשוואה $x^2 = 10 - \frac{1}{x}$ יש פתרון.

(13) נגדיר $f(x) = x^2 + \frac{1}{x-1}$.

א. חשב $f(0), f(2)$.

ב. האם ניתן להסיק לפי משפט ערך הביניים שלמשוואה $x^2 + \frac{1}{x-1} = 0$ יש פתרון בקטע $(0, 2)$.

פתרונות

(1) (1) לא רציפה. (2) לא רציפה. (3) רציפה. (4) רציפה. (5) רציפה בנקי: $x = 0, 1$, לא רציפה

בנקודה $x = 2$. (6) רציפה בנקי $x = 1$. לא רציפה בנקי $x = 2$. (2) $k = 1$. (2) $k = 4$.

(3) $k = \frac{2}{3}$. (4) $k = -1$. (3) $a = 0, b = \frac{1}{2}$. (2) $a = 1, b = 2$ או $a = 2, b = 1$.

(3) $a = -2e^{-1}, b = e^{-1}$. (4) $a = e/3, b = -e/3$. (4) (1) סליקה. (2) סליקה. (5) מסוג

ראשון. (6) סליקה. (12) $[0.1, 1]$. (13) א. $f(0) = -1, f(2) = 5$. ב. לא.

פרק 4

גזירות של פונקציה, הגדרת הנגזרת

(1) א. תאר שתי דרכים שונות לבדיקת גזירות של פונקציה מפוצלת בנקודת הפיצול (תפר) שלה. השתמש בפונקציה מסעיף ב.3. שלהלן כדי להדגים שתי שיטות אלה. בנוסף, הסבר מתי עליך להשתמש בכל אחת מהשיטות שתיארת.
 ב. בדוק גזירות הפונקציות הבאות בתחום הגדרתן בכל דרך שתבחר. בנוסף רשום נוסחה עבור הנגזרת של כל אחת מהפונקציות.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x & x \geq 2 \\ x^3 - 14 & x < 2 \end{cases} \quad (2) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x & x \geq 2 \\ x^3 - 14 & x < 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x) = \begin{cases} \ln(1+2x) & -0.5 < x < 0 \\ x^2 + 2x & x \geq 0 \end{cases} \quad (4) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 + 8x & x \geq 2 \\ x^3 + 12 & x < 2 \end{cases} \quad (3)$$

$$f(x) = 3x^2 + x|x| + 1 \quad (6) \quad f(x) = 2 + 4|x-1| \quad (5)$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad (8) \quad f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad (7)$$

(2)

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x+1} & x \geq -1 \\ \frac{1}{x} + a & x < -1 \end{cases} \quad \text{נתונה הפונקציה}$$

א. עבור איזה ערך של הקבוע a הפונקציה רציפה בנקודה $x = -1$.

ב. עבור ערך ה- a שקיבלת בסעיף א בדוק על פי הגדרת הנגזרת האם הפונקציה הנתונה

גזירה בנקודה $x = -1$.

(3)

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x-1} & x \geq 0 \\ -(x+1)^2 & x < 0 \end{cases} \quad \text{נתונה הפונקציה}$$

א. האם הפונקציה רציפה ?

ב. בדוק על פי הגדרת הנגזרת האם הפונקציה הנתונה גזירה בנקודה $x = 1$.

(4) עבור איזה ערכים של הקבועים a ו- b יהיו הפונקציות הבאות גזירות בנקודת התפר.

עבור ערכים אלה, רשום נוסחה עבור הנגזרת.

$$f(x) = \begin{cases} e^x & 0 < x \leq 1 \\ ax + b & x > 1 \end{cases} \quad (\text{ב}) \quad f(x) = \begin{cases} \ln^3 x & 0 < x \leq e \\ ax + b & x > e \end{cases} \quad (\text{א})$$

(5) חשב על פי הגדרת הנגזרת את נגזרות הפונקציות הבאות:

$$\begin{aligned} f(x) = \sin 4x & \quad (3) & f(x) = \frac{1}{x+1} & \quad (2) & f(x) = x^2 + 4x + 1 & \quad (1) \\ f(x) = \sqrt{x+10} & \quad (6) & f(x) = \ln x & \quad (5) & f(x) = e^x & \quad (4) \end{aligned}$$

* בתרגיל זה אסור להשתמש בכלל לופיטל.

(6) חשב את $f'(0)$ עבור כל אחת מהפונקציות הבאות:

$$f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-44) \quad (1)$$

$$f(x) = 2x(|x|+1)\sqrt{1+x+x^2} \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{\sin x(x-4)^{10}(1+\tan x)^4 \cos(x+\sin x)}{(x-1)^2(x-10)^{10}} \quad (3)$$

$$\left(z(0) = 1, \lim_{x \rightarrow 0} z(x) = 4 : \text{זוהב} \right) f(x) = x \cdot z(x) \quad (4)$$

$$f(x) = |x^4 - x^3 + \sin(10x) - 1| \quad (5)$$

(7) בדוק האם הפונקציה משאלה (1) סעיף (4) גזירה פעמיים בנקודה $x = 0$.

(8) הוכח או הפרך (אם הטענה נכונה, הוכח אותה. אם לא הבא דוגמה נגדית לטענה):

א. אם h גזירה ב- x_0 , ו- g אינה גזירה ב- x_0 אז $f = g + h$ אינה גזירה ב- x_0 .

ב. אם h אינה גזירה ב- x_0 , ו- g אינה גזירה ב- x_0 אז $f = g + h$ אינה גזירה ב- x_0 .

ג. אם h אינה גזירה ב- x_0 , ו- g אינה גזירה ב- x_0 אז $f = g \cdot h$ אינה גזירה ב- x_0 .

ד. אם h גזירה ב- x_0 , ו- g אינה גזירה ב- x_0 אז $f = g \cdot h$ אינה גזירה ב- x_0 .

פתרונות

(1)

$$f'(x) = \begin{cases} 2x-5 & x > 2 \\ 3x^2 & x < 2 \end{cases} \quad (2) \quad f'(x) = \begin{cases} 2x-4 & x > 2 \\ 3x^2 & x < 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{1+2x} & -0.5 < x < 0 \\ 2x+2 & x \geq 0 \end{cases} \quad (4) \quad f'(x) = \begin{cases} 2x+8 & x \geq 2 \\ 3x^2 & x < 2 \end{cases} \quad (3)$$

$$f'(x) = \begin{cases} 8x & x \geq 0 \\ 4x & x < 0 \end{cases} \quad (6) \quad f'(x) = \begin{cases} 4 & x > 1 \\ -4 & x < 1 \end{cases} \quad (5)$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad (8) \quad f'(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (7)$$

לתשומת לבך! בתחומים בהם קיימת נוסחה לנגזרת, הפונקציה גזירה. בנקודות בהן הנגזרת לא קיימת הפונקציה לא גזירה. למשל, בסעיף 1 הפונקציה גזירה עבור $x \neq 2$.

(2) (1) $a = 1$ לא גזירה.

(3) (1) רציפה (2) לא גזירה.

(4) (א) $a = 3/e, b = -2$ (ב) $a = e, b = 0$.

(5)

$$f'(x) = 4 \cos(4x) \quad (3) \quad f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} \quad (2) \quad f'(x) = 2x+4 \quad (1)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+10}} \quad (6) \quad f'(x) = \frac{1}{x} \quad (5) \quad f'(x) = e^x \quad (4)$$

$$-10 \quad (5) \quad 4 \quad (4) \quad (0.4)^{10} \quad (3) \quad 2 \quad (2) \quad 44! \quad (1) \quad (6)$$

(7) לא גזירה פעמיים.

פרק 5**גזירה של פונקציה**

(1) גזור פעמיים את הפונקציות הבאות (בסעיפים 27-29 גזור פעם אחת):

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2} \quad (3) \quad f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} \quad (2) \quad f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{2x} \quad (1)$$

$$f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 \quad (6) \quad f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2} \quad (5) \quad f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4} \quad (4)$$

$$f(x) = x \cdot \ln x \quad (9) \quad f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad (8) \quad f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad (7)$$

$$f(x) = \ln^2 x + 2 \ln x - 3 \quad (12) \quad f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{2-x}} \quad (11) \quad f(x) = x^2 \cdot \ln x \quad (10)$$

$$f(x) = (x+2) \cdot e^{\frac{1}{x}} \quad (15) \quad f(x) = e^{\frac{1}{x}} \quad (14) \quad f(x) = \ln^2 x + \frac{1}{\ln^2 x} \quad (13)$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1} \quad (18) \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2} \quad (17) \quad f(x) = x \cdot e^{-2x^2} \quad (16)$$

$$f(x) = \cos(x^4) \quad (21) \quad f(x) = \sin(x^3) \quad (20) \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2} (1-x) \quad (19)$$

$$f(x) = \ln(\cos x^2) \quad (24) \quad f(x) = \tan(x^2) \quad (23) \quad f(x) = \sin^3 x \quad (22)$$

$$f(x) = (x+1)^{\sin x} \quad (27) \quad f(x) = \arctan(x^2) \quad (26) \quad f(x) = \arcsin(2x+3) \quad (25)$$

$$f(x) = (\cos x)^{\ln x} \quad (29) \quad f(x) = (\sin x)^x \quad (28)$$

פתרונות

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 20x - 62}{(2x+10)^2}, \quad f''(x) = \frac{448}{(2x+10)^3} \quad (2) \quad (1)$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 8}{4x^2}, \quad f''(x) = \frac{4}{x^3}$$

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2 - 12)}{(x^2 - 4)^2}, \quad f''(x) = \frac{4x \cdot (2x^2 + 24)}{(x^2 - 4)^3} \quad (4) \quad (3)$$

$$f'(x) = \frac{4x}{(x+1)^3}, \quad f''(x) = \frac{4(1-2x)}{(x+1)^4} \quad (5)$$

$$f'(x) = -\frac{6(x+1)^2}{(x-1)^4}, \quad f''(x) = 12 \frac{(x+1)(x+3)}{(x-1)^5} \quad (6) \quad (8)$$

$$f'(x) = \frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}, \quad f''(x) = \frac{6x}{(x+1)^4} \quad (7)$$

$$f'(x) = \frac{2 - \ln x}{2x^{1.5}}, \quad f''(x) = \frac{3 \ln x - 8}{4x^{2.5}} \quad (10)$$

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}, \quad f''(x) = \frac{2 \ln x - 3}{x^3} \quad (9)$$

$$f'(x) = x(2 \ln x + 1), \quad f''(x) = 2 \ln x + 3 \quad (11)$$

$$f'(x) = \ln x + 1, \quad f''(x) = \frac{1}{x} \quad (12)$$

$$f'(x) = \frac{2}{x}(\ln x + 1), \quad f''(x) = \frac{-2 \ln x}{x^2} \quad (13)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2(2-x)}, \quad f''(x) = \frac{1}{(4-2x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2}{x} \left[\frac{(\ln x)^4 - 1}{(\ln x)^3} \right], \quad f''(x) = -\frac{2}{x^2} \left\{ \frac{(\ln x)^5 - (\ln x)^4 - (\ln x) - 3}{(\ln x)^4} \right\}$$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{x^2 - x - 2}{x^2} \right), \quad f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{5x + 2}{x^4} \right) \quad (15) \quad (14)$$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right), \quad f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1 + 2x}{x^4} \right) \quad (16)$$

$$f'(x) = e^{-2x^2} (1 - 4x^2), \quad f''(x) = -4xe^{-2x^2} (3 - 4x^2) \quad (17)$$

$$f'(x) = \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9 \cdot \sqrt[3]{x^4}} \quad (18)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{3 \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}}, \quad f''(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{-\frac{1}{3}x^2 - 1}{(x^2 - 1)^{5/3}} \quad (19)$$

$$f'(x) = \frac{2 - 5x}{3 \sqrt[3]{x}}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9} \cdot \frac{1 + 5x}{\sqrt[3]{x^4}} \quad (20)$$

$$f'(x) = \cos(x^3) \cdot 3x^2, \quad f''(x) = -9x^4 \sin(x^3) + 6x \cdot \cos(x^3)$$

$$f'(x) = -\sin(x^4) \cdot 4x^3, \quad f''(x) = -16x^6 \cos(x^4) - 12x^2 \cdot \sin(x^4) \quad (21)$$

$$f'(x) = 3\sin^2 x \cdot \cos x, \quad f''(x) = 6\sin x \cos^2 x - 3\sin^3 x \quad (22)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{\cos^2(x^2)}, \quad f''(x) = \frac{2 \cdot \cos^2(x^2) - 8x^2 \cos(x^2) \sin(x^2)}{\cos^4(x^2)} \quad (23)$$

$$f'(x) = \tan(x^2) \cdot (-2x), \quad f''(x) = \frac{-4x^2}{\cos^2(x^2)} - 2 \tan(x^2) \quad (24)$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^2 - 3x - 2}}, \quad f''(x) = \frac{2x + 3}{2(-x^2 - 3x - 2)^{3/2}} \quad (25)$$

$$f'(x) = x^{\sin x} \left(\cos x \cdot \ln(x+1) + \frac{\sin x}{x+1} \right) \quad (26)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^4}, \quad f''(x) = \frac{2-6x^4}{(1+x^4)^2} \quad (27)$$

$$f'(x) = (\cos x)^{\ln x} \cdot \left(\frac{\ln(\cos x)}{x} - \tan x \cdot \ln x \right) \quad (28)$$

$$f'(x) = (\sin x)^x (\ln(\sin x) + \cot x \cdot x) \quad (29)$$

פרק 6

נגזרות של פונקציות מיוחדות

נגזרת הפונקציה ההפוכה

(1) הוכח, בעזרת כלל הנגזרת של הפונקציה ההפוכה, את הנוסחאות הבאות:

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad (3) \quad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (2) \quad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (1)$$

נגזרות מסדרים גבוהים, נוסחת לייבניץ

(2) חשב את הנגזרת ה- n , $f^{(n)}(x)$, של הפונקציות הבאות:

$$y = \frac{x^4}{x^2-1} \quad (4) \quad y = \frac{x}{(x^2-1)(x-2)} \quad (3) \quad y = \frac{2x+3}{x^2-3x+2} \quad (2) \quad y = \frac{1}{x+a} \quad (1)$$

(3) חשב את הנגזרת העשירית, $y^{(10)}$, של הפונקציות הבאות:

$$y = x^3 \sin 5x \quad (2) \quad y = x^3 e^x \quad (1)$$

נגזרת של פונקציה סתומה

(4) גזור את הפונקציות הסתומות הבאות ומצא את y' :

$$xy = \sinh \frac{y}{x} \quad (3) \quad 4 \ln x + 10 \ln y = y^2 \quad (2) \quad x^2 + y^5 - y = 1 \quad (1)$$

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{xy} \quad (6) \quad x^y - y^x = 1 \quad (5) \quad x^y - xy = 10 \quad (4)$$

(5) נתונה פונקציה סתומה $xy - y^3 + x^2 - x = 0$. מצא את ערך y'' בנקודה $y = 1$.

נגזרת של פונקציה הנתונה בצורה פרמטרית

(6) חשב את הנגזרת הראשונה והשנייה של הפונקציות הבאות הנתונות בצורה פרמטרית.

$$\begin{cases} x(t) = t \cos t \\ y(t) = t^2 - 1 \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = t \cos t \end{cases} \quad (1)$$

נגזרת של פונקציה מן הצורה $h(x)^{g(x)}$

(7) גזור את הפונקציות הבאות:

$$f(x) = (\cos x)^{\ln x} \quad (3) \quad f(x) = (x+1)^{\sin x} \quad (2) \quad f(x) = (\sin x)^x \quad (1)$$

פתרונות**(2)**

$$y^{(n)} = (-1)^n n! (x+a)^{-n-1} \quad (1)$$

$$y^{(n)} = (-1)^n n! \left(-5(x-1)^{-n-1} + 7(x-2)^{-n-1} \right) \quad (2)$$

$$y^{(n)} = (-1)^n n! \left(-\frac{1}{2}(x-1)^{-n-1} - \frac{1}{6}(x+1)^{-n-1} + \frac{2}{3}(x-2)^{-n-1} \right) \quad (3)$$

$$y' = 2x - \frac{1}{2} \left((x-1)^{-2} - (x+1)^{-2} \right) \quad (4)$$

$$y'' = 2 + \left((x-1)^{-3} - (x+1)^{-3} \right)$$

$$y^{(n)} = \frac{1}{2} (-1)^n n! \left((x-1)^{-n-1} - (x+1)^{-n-1} \right) \quad (n > 2)$$

(3)

$$\left(e^x \cdot x^3 \right)^{(10)} = e^x \left[x^3 + 103x^2 + 456x + 120 \cdot 6 \right] \quad (1)$$

$$\left(\sin 5x \cdot x^3 \right)^{(10)} = -5^{10} x^3 \sin 5x + 6 \cdot 5^{10} x^2 \cos 5x + 54 \cdot 5^9 x \sin 5x - 24 \cdot 5^9 \cos 5x \quad (2)$$

(4)

$$y' = \frac{-y(x^2 + \cosh \frac{y}{x})}{x(x^2 - \cosh \frac{y}{x})} \quad (3) \quad y' = \frac{-4y}{x(10 - 2y^2)} \quad (2) \quad y' = \frac{2x}{1 - 5y^4} \quad (1)$$

$$y' = \frac{y - \sqrt{y}}{\sqrt{x} - x} \quad (6) \quad y' = \frac{y^x \ln y - x^{y-1} y}{x^y \ln x - y^{x-1} x} \quad (5) \quad y' = \frac{y(1 - x^{y-1})}{x^y \ln x - x}$$

$$-\frac{1}{8}, -1 \quad (5)$$

(6)

$$y'(x) = \frac{\cos t - t \sin t}{1 - \cos t} \quad (1)$$

$$y''(x) = \frac{(-2 \sin t - t \cos t)(1 - \cos t) - \sin t (\cos t - t \sin t)}{(1 - \cos t)^3}$$

$$y'(x) = \frac{2t}{\cos t - t \sin t} \quad (2)$$

$$y''(x) = \frac{2(\cos t - t \sin t) - 2t(-2 \sin t - t \cos t)}{(\cos t - t \sin t)^3}$$

(7) ראה פתרון שאלות 37-39 בפרק 6.

פרק 7**בעיות משיקים (המשמעות הגיאומטרית של הנגזרת)**

- (1) הישר $y = x + b$ משיק לגרף הפונקציה $f(x) = e^x$. מצא את b ואת נקודת ההשקה.
- (2) הישר $y = 4x + b$ משיק לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{2}{x^2} + 3$. מצא את b ואת נקודת ההשקה.
- (3) הישר $y = 3x$ משיק לגרף הפונקציה $f(x) = x\sqrt{x} + b$. מצא את b ואת נקודת ההשקה.
- (4) הישר $y = ax + \frac{1}{2}$ משיק לגרף הפונקציה $g(x) = \frac{2}{x+c}$ בנקודה $x = 0$. מצא את a ו- c .
- (5) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = \ln x$ בנקודה $x = e$.
- (6) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = x^3 + 1$ בנקודה $x = 0$.
- (7) מצא את משוואת המשיק למעגל $x^2 + y^2 = 25$ בנקודה $(3, 4)$.
- (8) הפונקציות $y = \frac{1}{x}$ ו- $y = -\frac{1}{2}x^2 + k$ משיקות זו לזו. מצא את k ואת נקודת ההשקה.
- (9) מצא את נקודת ההשקה ואת משוואת המשיק לגרף העקומה העובר דרך הנקודה הנתונה.
 (א) $(2, -3)$ $y = x^2 - 2x + 1$ (ב) $(-3, 1)$ $y = \sqrt{x}$
- (10) מצא את משוואת המשיקים המשותפים לפונקציות הבאות:
 $y = x^2$ ו- $y = -\frac{1}{4}x^2 - 5$
- (11) מצא את הזווית בין הפונקציות $y = f(x) = x^2$ ו- $y = g(x) = \frac{1}{x}$.
- (12) מצא את הזווית בין המעגל $x^2 + y^2 = 8$ והפרבולה $y^2 = 2x$.
- (13) הוכח שהאליפסה $x^2 + 2y^2 = 8$ וההיפרבולה $x^2 - y^2 = 2$ נחתכות בזווית ישרה.

פתרונות

- (1) נקודת ההשקה היא $(0,1)$ ומשוואת המשיק היא $y = x + 1$.
- (2) נקודת ההשקה היא $(-1,5)$ ומשוואת המשיק היא $y = 4x + 9$.
- (3) נקודת ההשקה היא $(4,12)$ ו- $b = 4$.
- (4) נקודת ההשקה היא $(0, \frac{1}{2})$ ומשוואת המשיק היא $y = -\frac{1}{8}x + \frac{1}{2}$.
- (5) משוואת המשיק היא $y = \frac{1}{e}x$.
- (6) משוואת המשיק היא $y = 1$.
- (7) משוואת המשיק היא $y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}$.
- (8) נקודת ההשקה $(1,1)$, $k = 1.5$.
- (9) א) $(0,1)$, $y = -2x + 1$, $(4,9)$, $y = 6x - 15$.
- ב) המשיק: $(9,3)$, $y = \frac{1}{6}x + \frac{3}{2}$.
- (10) $y = 2x - 1$, $y = -2x - 1$.
- (11) 71.57°
- (12) 71.56°

פרק 8

כלל לופיטל

(1) חשב את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - x}{x - 1} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 - 50}{2x^2 + 3x - 35} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 + 7} - 4}{\sqrt{x - 2} - 1} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+5}}{x - 4} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{\sqrt{x+1} - 2} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{3}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x^2 - 1} - \sqrt{x}}{x - 1} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x - x^2 - 2x - 2}{2x^3} \quad (12)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} \quad (a, b > 0) \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(x+1) + x}{x} \quad (15)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right)}{\frac{1}{x^2}} \quad (14)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{x^2 - 2x + 1} \quad (13)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{\sin(bx)} \quad (18)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax^2)}{bx^2} \quad (17)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} \quad (16)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{\cos x}}{x} \quad (21)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \quad (20)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \quad (19)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - \sin(x^2)}{x^4} \quad (24)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3} \quad (23)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4} \quad (22)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \tanh x \quad (27)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x^2 + 3x)}{\arcsin(x^2 - 4x)} \quad (26)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x^2)}{x^4} \quad (25)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{2x^2 + x + 3} \quad (30)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cosh x - 2}{1 - \cos 2x} \quad (29)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sinh x} \quad (28)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^2 + 2 \ln x - 3}{x} \quad (33)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x + x + 1}{e^x} \quad (32)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} \quad (31)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot e^x \quad (36)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x}{x} \quad (35)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sin x)}{\ln(\tan x)} \quad (34)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \tan x \cdot \ln x \quad (39)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x} \quad (38)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \ln x \quad (37)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2 - 9) \cdot \ln(x - 3) \quad (42)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x \quad (41)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \cot x \quad (40)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) \quad (45)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \left[\sqrt{1 + \frac{5}{x}} - 1 \right] \quad (44)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \ln \left(\frac{x+3}{x-3} \right) \quad (43)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x \quad (48)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [\ln(3x) - \ln(\sin 5x)] \quad (47)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) \quad (46)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (ax)^x \quad (a > 0) \quad (51)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{x-1} \quad (50)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} + x \quad (49)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x} \quad (54)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)^{x^2} \quad (53)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (2x - 4)^{x-2} \quad (52)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x^2)^{\frac{1}{x^4}} \quad (57)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} \quad (56)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan 3x)^{\frac{1}{x}} \quad (55)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x+1)^{\cot x} \quad (60)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\tan x} \quad (59)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\tan x} \quad (58)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} \quad (63)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x^2)^{\cot^2 x} \quad (62)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x + \sin x)^{\tan x} \quad (61)$$

(2) כל אחד מהגבולות הבאים הוא מן הסוג $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$. הראה זאת והסבר מדוע למרות כך, כלל לופיטל אינו ישים, לבסוף חשב את הגבול.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + \sin x}{4x + \cos x} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16^x + 4^{x+1}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (1)$$

פתרונות

(1)

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{5}{6} (7) & \frac{3}{2} (6) & \frac{1}{6} (5) & 4 (4) & n-1 (3) & \frac{20}{17} (2) & \frac{5}{6} (1) \\ 2 (14) & -\frac{1}{2} (13) & \frac{1}{6} (12) & \frac{1}{2} (11) & \ln\left(\frac{a}{b}\right) (10) & 1 (9) & -\frac{3}{2} (8) \\ \frac{1}{2} (21) & \frac{1}{2} (20) & \frac{1}{6} (19) & \frac{a}{b} (18) & \frac{a}{b} (17) & 1 (16) & 1 (15) \\ 1 (28) & 1 (27) & -\frac{3}{4} (26) & -\frac{1}{2} (25) & -\frac{1}{3} (24) & \frac{1}{3} (23) & \frac{1}{8} (22) \\ 0 (35) & \infty (34) & 0 (33) & \infty (32) & \frac{1}{2} (31) & \frac{1}{2} (30) & \frac{2}{3} (29) \\ 0 (42) & 0 (41) & 0 (40) & 0 (39) & 0 (38) & 0 (37) & 1 (36) \\ \frac{1}{2} (49) & \ln \frac{3}{5} (48) & 0.5 (47) & 0 (46) & 2.5 (45) & 6 (44) & 0 (43) \\ 1 (56) & e^2 (55) & 1 (54) & 1 (53) & 1 (52) & e (51) & -\frac{1}{2} (50) \\ 1 (63) & e (62) & 1 (61) & 1 (60) & e^{-1/2} (59) & e^{1/3} (58) & e^3 (57) \\ & & & & & e^{-1/6} (65) & e (64) \end{array}$$

(2)

$$0.75 (3) \quad 0.25 (2) \quad 1 (1)$$

פרק 9**חקירת פונקציה**

(1) חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה לפי הפירוט הבא: תחום הגדרה ורציפות, נקודות חיתוך עם הצירים*, זוגיות, אסימפטוטות אנכיות, אופקיות ומשופעות**, נקודות קיצון, תחומי עליה וירידה, נקודות פיתול***, תחומי קמירות וקעירות, גרף.

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2} \quad (3)$$

$$f(x) = x^4 - 2x^3 \quad (2)$$

$$f(x) = x(x-9)^2 \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2} \quad (6)$$

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-4} \quad (5)$$

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2} \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{x^2-4x+3}{x^2-4} \quad (9)$$

$$f(x) = \frac{x^2-1}{(x-2)(x-5)} \quad (8)$$

$$f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 \quad (7)$$

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad (12)$$

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad (11)$$

$$f(x) = \frac{x^3-x^2}{x^2-1} \quad (10)$$

$$f(x) = \ln^2 x + 2\ln x - 3 \quad (15)$$

$$f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{2-x}} \quad (14)$$

$$f(x) = x \cdot \ln x \quad (13)$$

$$f(x) = x - e^x \quad (18)$$

$$f(x) = \ln^2 x + \frac{1}{\ln^2 x} \quad (17)$$

$$f(x) = 4\ln^2 x - 4\ln x - 3 \quad (16)$$

$$f(x) = x \cdot e^{-2x^2} \quad (21)$$

$$f(x) = (x+2) \cdot e^{\frac{1}{x}} \quad (20)$$

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} \quad (19)$$

$$f(x) = \left(\sqrt[3]{x^2} - 1\right)^2 \quad (24)$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2}(1-x) \quad (23)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \quad (22)$$

$$f(x) = x - 2\arctan x \quad (27)$$

$$f(x) = \frac{|x-3|}{x-2} \quad (26)$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2-1} \quad (25)$$

$$f(x) = 8\cos x + 2\cos 2x - 3 \quad (30) \\ (0 \leq x \leq 2\pi)$$

$$f(x) = 2\cos^2 x - \sin 2x \quad (29) \\ (0 \leq x \leq \pi)$$

$$f(x) = \arcsin(\sin x) \quad (28)$$

הערות:

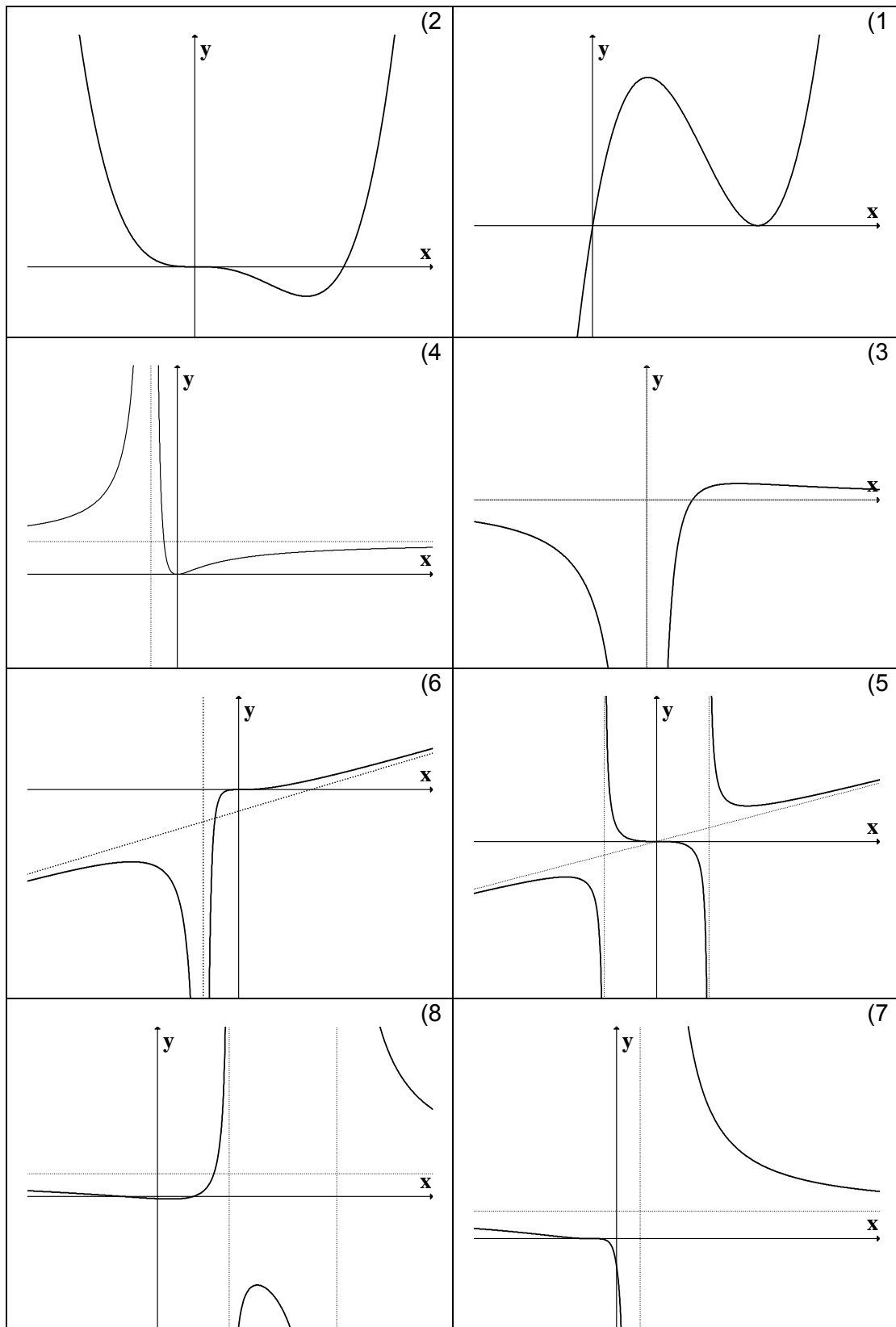
* בשאלה 27 אין צורך למצוא חיתוך עם ציר x . בשאלה 18 מצא את החיתוך רק לאחר השרטוט.

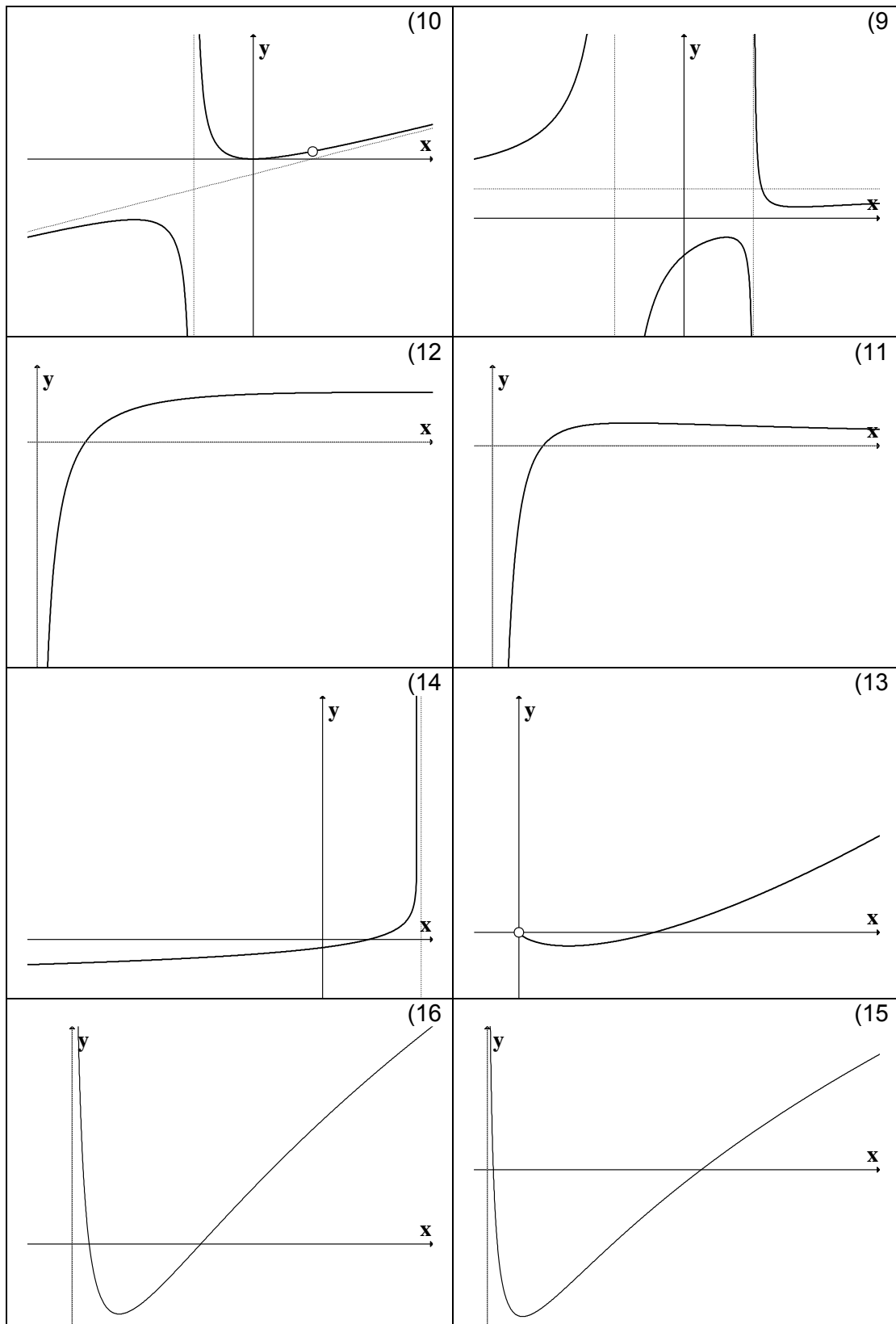
** בתרגילים 1,2,28,29,30 אין צורך למצוא אסימפטוטות (וגם אין).

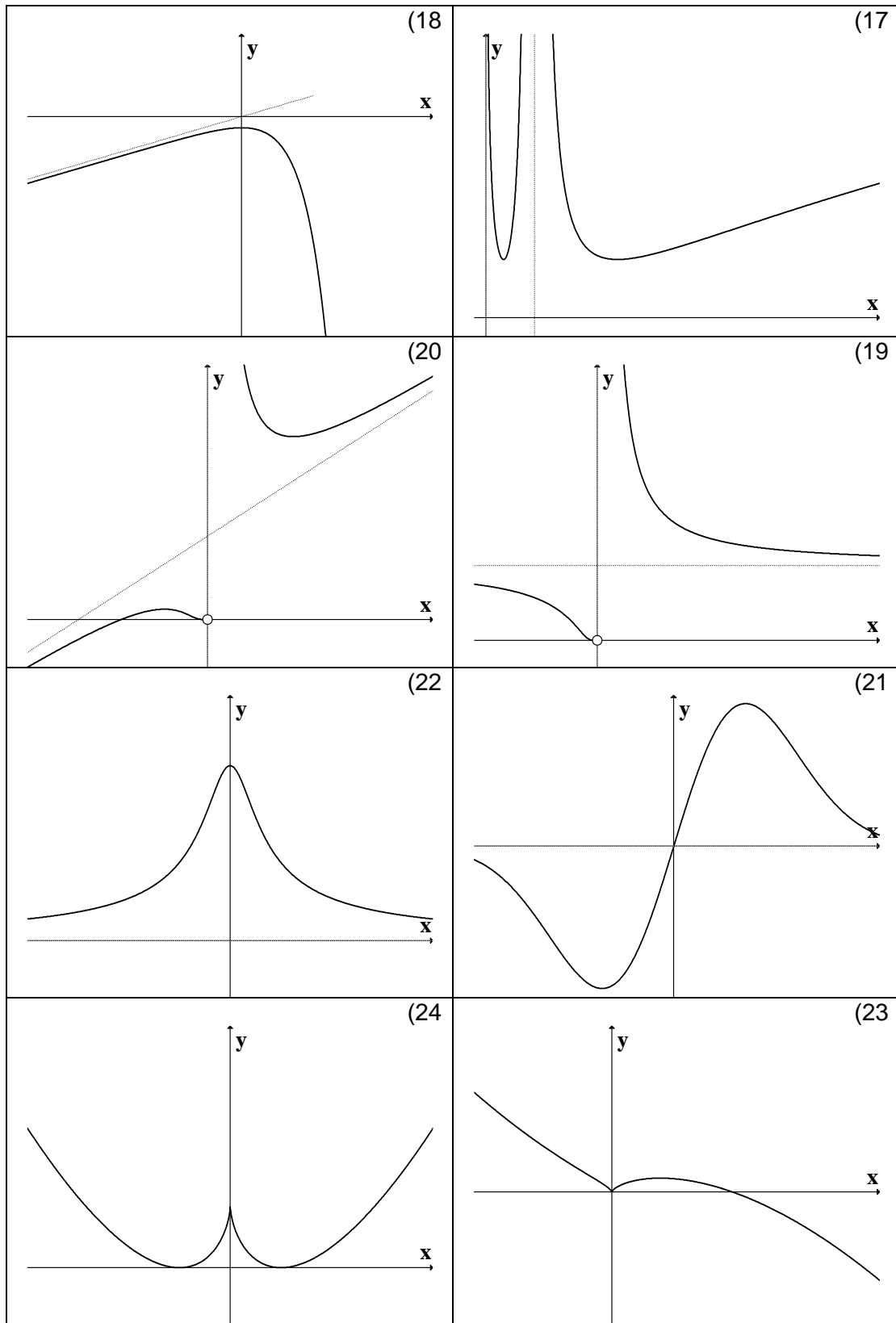
*** בתרגילים 9,17 אין צורך למצוא נקודות פיתול אלא אם כן למדתם ניוטון רפסון. בתרגיל 8 אין צורך למצוא נקודות פיתול אלא אם כן למדתם לפתור משוואה ממעלה שלישית.

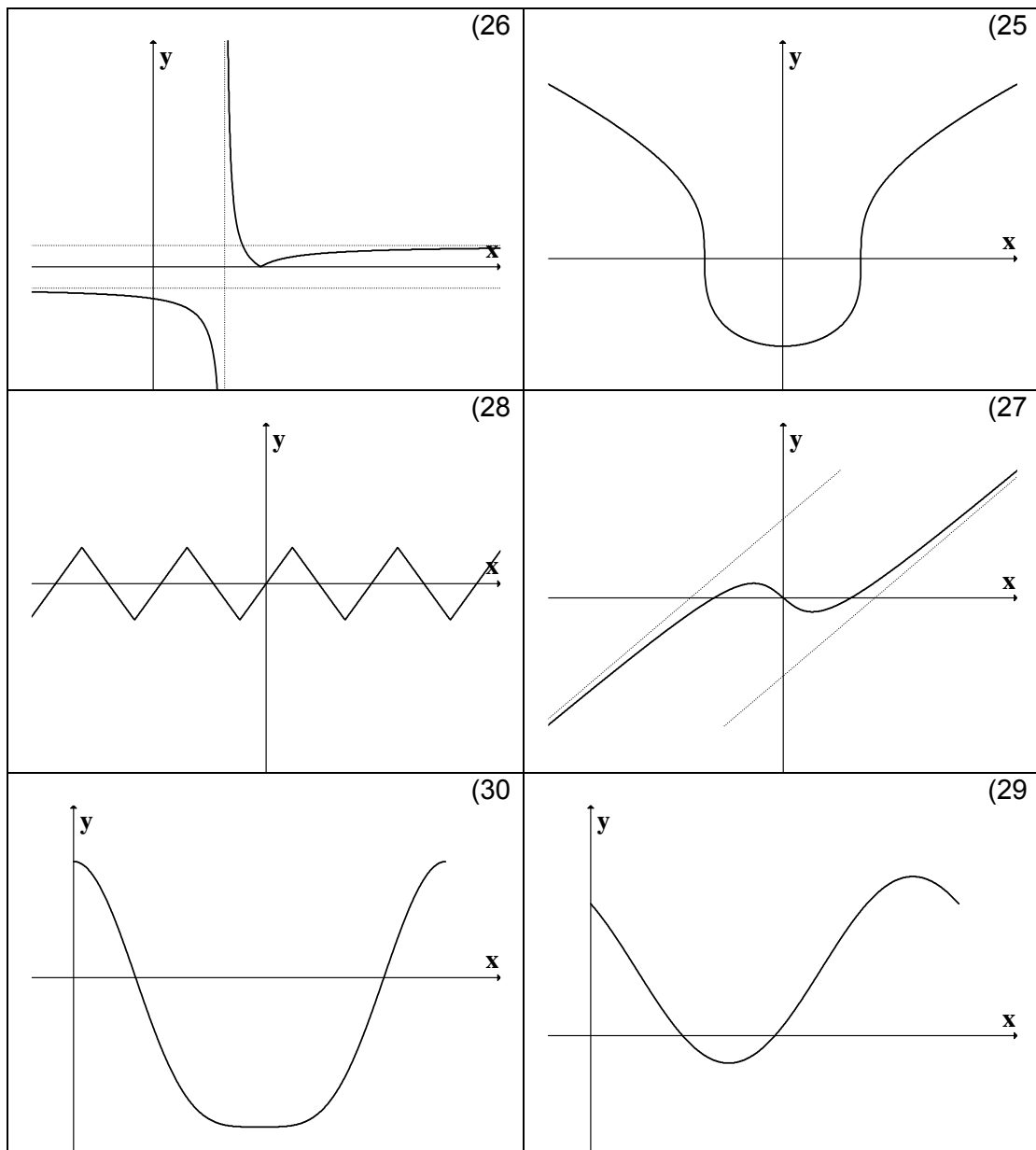
פתרונות

(1)









פרק 10**חקירת פונקציה – "שאלות מסביב"**

(1)

(א) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + x^2$. ידוע שהנקודה $x = 1$ נקודת קיצון. מצא את הקבוע a .

(ב) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + bx^2$. ידוע שהנקודה $(1, 2)$ נקודת קיצון.

מצא את הקבועים a, b .

(ג) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + x^2$. ידוע שהנקודה $x = 1$ נקודת פיתול. מצא את הקבוע a .

(ד) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + bx^2$. ידוע שהנקודה $(1, 2)$ נקודת פיתול.

מצא את הקבועים a, b .

(ה) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + x^2$ שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x = 3$ הוא 33.

מצא את a .

(ו) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + bx^2$. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $(3, 9)$ הוא 12.

מצא את a, b .

(ז) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{ax^3 + x^2}{2x^3 + x + 6}$. ידוע שהישר $y = 4$ אסימפטוטה לגרף הפונקציה.

מצא את a .

(ח) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{ax^2 + bx + 4}{x}$. ידוע שהישר $y = 0.5x + 1$ אסימפטוטה לגרף

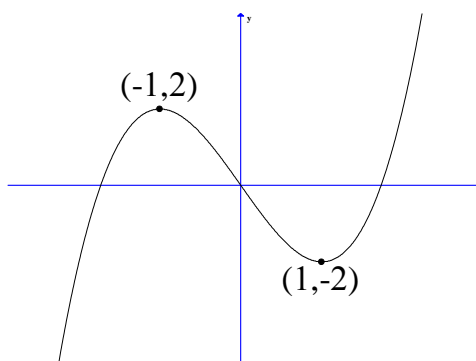
הפונקציה. מצא את a ואת b .

(ט) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{x^2 + ax + 6}$. ידוע שהישר $x = 1$ אסימפטוטה לגרף הפונקציה.

מצא את a .

(2) לפי גרף הפונקציה $f(x) = x^3 - 3x$

- א. מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x) = 5$.
 ב. מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x) = 2$.
 ג. מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x) = 0.5$.
 ד. עבור איזה ערך של k למשוואה $f(x) = k$ יש בדיוק פתרון אחד.
 ה. עבור איזה ערך של k למשוואה $f(x) = k$ יש בדיוק שני פתרונות.
 ו. עבור איזה ערך של k למשוואה $f(x) = k$ יש בדיוק שלושה פתרונות.
 ז. האם קיים ערך של k עבורו למשוואה $f(x) = k$ אין פתרון.
 ח. מצא את התחומים בהם הפונקציה היא חח"ע.



(3) הוכח את אי השוויונים הבאים לגבי התחום הרשום לידם:

$$(1) \quad (-\infty < x < \infty) \quad 8x^3 \leq 3x^4 + 6x^2 \quad (2) \quad (0 < x < \frac{\pi}{3}) \quad x < 2 \sin x$$

$$(3) \quad (x > 0) \quad \sqrt{x+1} < 1 + \frac{x}{2} \quad (4) \quad (x \geq 0) \quad \ln(x+1) \leq x$$

פתרונות

- (1)
 א) $a = -\frac{2}{3}$ ב) $b = 6, a = -4$ ג) $a = -\frac{1}{3}$
- ד) $b = 3, a = -1$ ה) $a = 1$ ו) $b = -1, a = \frac{2}{3}$
- ז) $a = 8$ ח) $a = 0.5$ ט) $a = -7$
- (2)
 א) 1 ב) 2 ג) 3
- ד) $k > 2$ או $k < -2$ ה) $k = \pm 2$ ו) $-2 < k < 2$
- ז) לא ח) $-1 < x < 1$ או $x < -1$ או $x > 1$

פרק 11**מקסימום ומינימום מוחלטים של פונקציה**

(1) מצא את נקודות המינימום המוחלט והמקסימום המוחלט של הפונקציות הבאות בתחומים הרשומים לידן (אם יש כאלה):

$$f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x + 5} \quad (2) \quad (-1 \leq x \leq 3) \quad f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x \quad (1)$$

$$\left(\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{7}{2}\right) f(x) = \begin{cases} 4x - 2 & x < 1 \\ (x-2)(x-3) & x \geq 1 \end{cases} \quad (4) \quad (-1 \leq x \leq 20) \quad f(x) = x^{2/3}(20-x) \quad (3)$$

$$(-5 < x < -1) \quad f(x) = \frac{x^2}{x+1} \quad (6) \quad (-5 \leq x \leq 1) \quad f(x) = 1 + |9 - x^2| \quad (5)$$

$$(-\infty < x < \infty) \quad f(x) = x^3 - 9x + 1 \quad (7)$$

(2) הוכח את אי השוויונים שמימין לגבי התחום הרשום בסוגריים משמאל.

$$(x \leq 1) \quad 0 \leq x^2 e^{x-1} \leq 1 \quad (3) \quad (x \geq 0) \quad x e^{-\sqrt{x}} \leq 1 \quad (2) \quad (x \text{ לכל}) \quad x^3 e^{-x} \leq \frac{27}{e^3} \quad (1)$$

פתרונות**(1)**

(1) $(-1, -7)$ מינימום מוחלט, $(3, 9)$ מקסימום מוחלט.

(2) $(-1, 0)$ מינימום מוחלט, $(5, 0)$ מינימום מוחלט, $(2, 3)$ מקסימום מוחלט.

(3) $(0, 0)$ מינימום מוחלט, $(20, 0)$ מינימום מוחלט, $(8, 48)$ מקסימום מוחלט.

(4) $(2.5, -0.25)$ מינימום מוחלט, $(1, 2)$ מקסימום מוחלט.

(5) $(-3, 1)$ מינימום מוחלט, $(-5, 17)$ מקסימום מוחלט.

(6) $(-2, -4)$ מקסימום מוחלט. אין מינימום מוחלט.

(7) אין מקסימום ואין מינימום.

הערת סימון:

$$[a, b] \Leftrightarrow a \leq x \leq b, \quad (a, b) \Leftrightarrow a < x < b, \quad [a, b) \Leftrightarrow a \leq x < b$$

פרק 12**פתרון משוואות (משפט ערך הביניים, מונוטוניות (משפט רול), ניוטון רפסון)**

(1) הוכח שלמשוואות הבאות יש בדיוק פתרון אחד:

$$-4x^3 + 21x^2 - 48x + 28 = 0 \quad (4) \quad x - 0.25\sin x = 7 \quad (3) \quad x^2 = -\ln x \quad (2) \quad x^3 + 4x - 1 = 0 \quad (1)$$

(2) נתונה המשוואה $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ונתון כי $b^2 < 3ac$.

מהו מספר הפתרונות של המשוואה? הוכח את תשובתך.

(3) עבור כל אחת מהמשוואות הבאות מצא את מספר הפתרונות ופתור אותה.

$$x^2 + x \sin x = 1 - \cos x \quad (4) \quad \ln(x+5) - 4 = x \quad (3) \quad \arctan x - x = 0 \quad (2) \quad e^{x-1} = x \quad (1)$$

(4) תהי f פונקציה גזירה לכל x המקיימת: $f'(x) \leq 1$, $f(0) = 1$, $f(1) = 2$.

הוכח שלמשוואה $f(x) + \sin x = 4x$ יש בדיוק פתרון אחד.

(5) הוכח שלמשוואות הבאות יש בדיוק שני פתרונות:

$$1 + 4x^4 = 8x^3 \quad (3) \quad 4x^3 + 5x - \frac{1}{x} = 0 \quad (2) \quad e^x - 5x = 0 \quad (1)$$

(6) בכל אחת מהמשוואות הבאות מצא קשר בין הפרמטרים על מנת שלמשוואות יהיה בדיוק פתרון אחד (הנח שכל הפרמטרים שונים מאפס).

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (2) \quad ax^2 + bx + c = 0 \quad (1)$$

$$(n > 4, \text{ odd}) \quad ax^n + bx^{n-2} + cx^{n-4} - d = 0 \quad (4) \quad x + a \cos(bx) = 1 \quad (3)$$

(7) פתור את המשוואות הבאות (סעיפים 2,3 בשיטת ניוטון רפסון):

$$-4x^3 + 21x^2 - 48x + 28 = 0 \quad (3) \quad 1 + 4x^4 = 8x^3 \quad (2) \quad 7x^3 - 33x^2 + 21x + 61 = 0 \quad (1)$$

פתרונות

(2) פתרון יחיד. (3) $x = 1$ (1) $x = 0$ (2) $x = 0$ (3) $x = -4$ (4) $x = 0$

$$\frac{1}{ab} < -1 \text{ או } \frac{1}{ab} > 1 \quad (3) \quad 4b^2 - 12ac < 0 \quad (2) \quad b^2 - 4ac = 0 \quad (1) \quad (6)$$

$$b^2(n-2)^2 - 4anc(n-4) < 0 \quad (4)$$

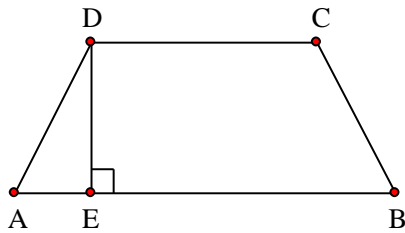
(7) (1) פתרון מדויק $x = -1$. (2) פתרונות מקורבים $x = 0.5576$, $x = 1.9672$

(3) פתרון מקורב $x = 0.8459$

פרק 13

בעיות מקסימום ומינימום

הערה: בפרק זה, סומנו התרגילים הקשים יותר בכוכבית *

בעיות בהנדסת המישור

(1) בטרפז שווה-שוקיים ABCD ($AB \parallel CD$) אורך השוק

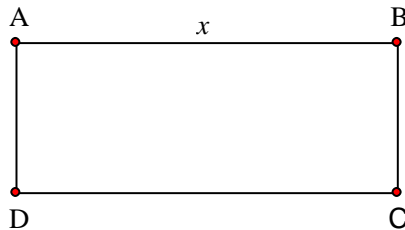
הוא 4 ס"מ ואורך הבסיס הקטן הוא 6 ס"מ.

DE הוא הגובה מקדקוד D (ראה ציור).

מה צריך להיות אורך הקטע DE כדי ששטח הטרפז יהיה מקסימלי?

(2) נתון מלבן ABCD. נסמן ב- x את אחת מצלעות

המלבן (ראה ציור).



(א) אם היקף המלבן הוא 60 ס"מ בטא באמצעות x את שטח המלבן.

(ב) אם היקף המלבן הוא p מצא מה צריכים להיות אורכי צלעות המלבן כדי ששטחו יהיה מקסימלי

(הבע את אורכי הצלעות באמצעות p).

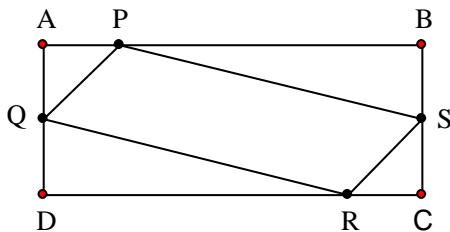
(3) נתון מלבן ABCD כך ש- $AD = BC = 5$ ס"מ,

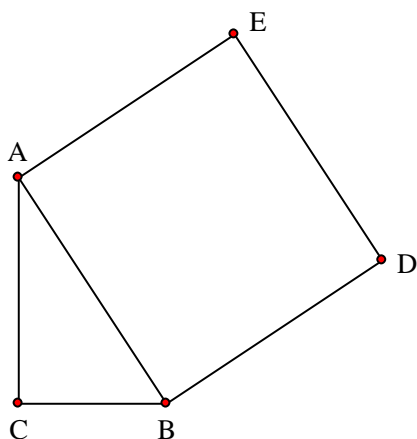
$AB = CD = 10$ ס"מ. על צלעות המלבן מקצים

קטעים: $AP = AQ = CS = CR = x$: (ראה ציור).

מה צריך להיות ערכו של x כדי ששטח

המקבילית PQRS יהיה מקסימלי?

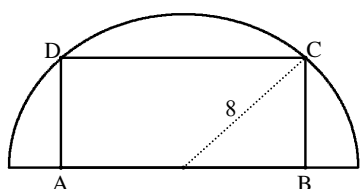




(4)

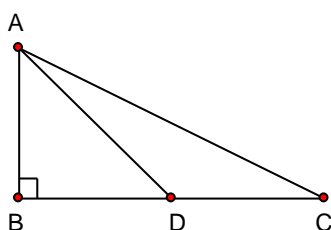
במשולש ישר זווית $\triangle ABC$ ($\sphericalangle C = 90^\circ$) סכום אורכי הניצבים הוא 8 ס"מ. על היתר AB בונים ריבוע ABDE. מה צריכים להיות אורכי הניצבים, כדי ששטח המחומש AEDBC יהיה מינימלי.

(5)



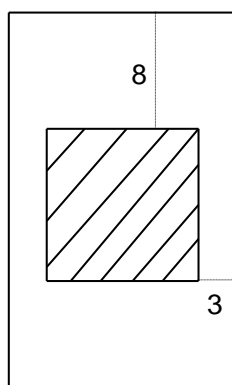
בחצי עיגול שרדיוסו 8 ס"מ חוסמים מלבן ABCD, כך שהצלע AB של המלבן מונחת על הקוטר, והקודים C ו-D מונחים על הקשת (ראה ציור). מה צריך להיות אורך הצלע AB כדי ששטח המלבן יהיה מקסימלי?

(6)



במשולש ישר-זווית $\triangle ABC$ ($\sphericalangle B = 90^\circ$), סכום אורכי הניצבים הוא 30 ס"מ. AD הוא תיכון לניצב BC (ראה ציור). חשב מה צריכים להיות אורכי הניצבים, על מנת שריבוע אורך התיכון יהיה מינימלי.

(7)

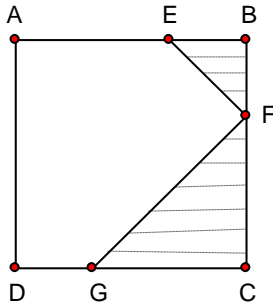


בחוברת פרסום, שטח כל עמוד הוא 600 סמ"ר. רוחב השוליים בראש העמוד ובתחתיתו הוא 8 ס"מ, ורוחב השוליים בצדדים הוא 3 ס"מ. מצא מה צריך להיות האורך והרוחב של כל עמוד, כדי שהשטח המיועד לדפוס יהיה מקסימלי (השטח המקווקו בציור).

(8) בריבוע ABCD הנקודות E, F, G נמצאות על הצלעות

AB, BC, CD בהתאמה, כך ש- $BE = BF$, $CF = CG$

(ראה ציור).



נתון כי האורך של צלע הריבוע הוא 6 ס"מ.

א. סמן ב- x את BF ואת BE, והבע באמצעות x את

הסכום של שטחי המשולשים EBF ו-FCG (השטח

המקווקו בציור).

ב. מצא את x שעבורו סכום שטחי המשולשים הוא

מינימלי.

ב. חשב את הסכום המינימלי של שטחי המשולשים.

(*9) נתון ריבוע ABCD שאורך צלעו 10 ס"מ. E היא נקודה

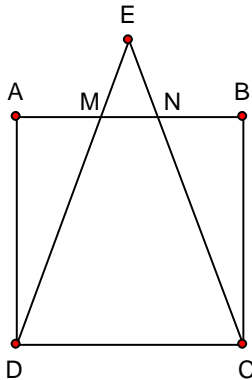
כלשהי מחוץ לריבוע, כך שהמשולש DEC הוא שוו"ש

($ED = EC$). שוקי המשולש חותכים את הצלע AB

בנקודות M ו- N (ראה ציור). מצא מה צריך להיות

אורך הקטע AM כדי שהסכום של שטחי המשולשים

EMN, AMD, BNC יהיה מינימלי.



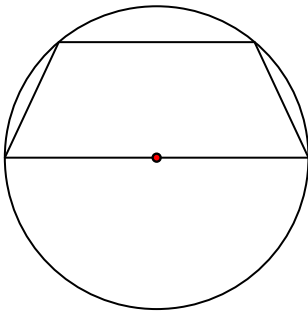
(*10) נתון מעגל שרדיוסו R . במעגל זה חסום טרפז שוו"ש,

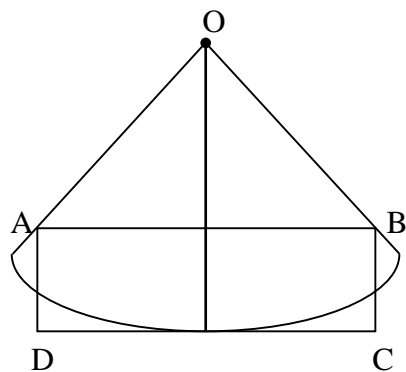
כך שהבסיס הגדול של הטרפז הוא קוטר במעגל (ראה

ציור). מבין כל הטרפזים החסומים באופן זה, הבע

באמצעות R את אורך הבסיס הקטן בטרפז ששטחו

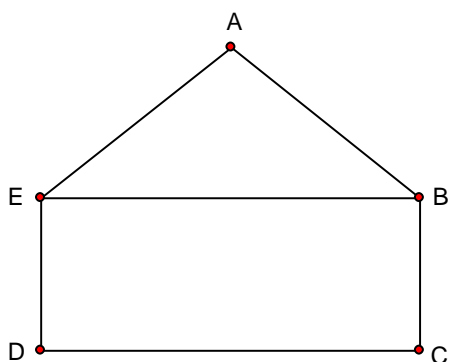
מקסימלי.





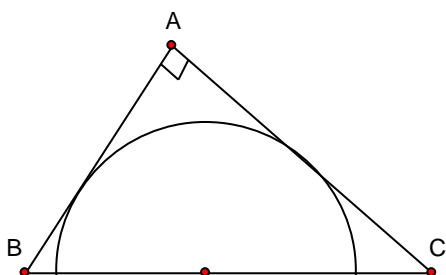
(11) נתונה גזרה של רבע עיגול שמרכזו O ורדיוסו 10 ס"מ.

בונים מלבן ABCD, כך שרבע המעגל משיק לצלע DC בנקודת האמצע שלה, והקודקודים A ו-B נמצאים על הרדיוסים התוחמים את הגזרה (ראה ציור).
מבין כל האלכסונים של המלבנים ABCD שנוצרים באופן זה, מצא את אורך האלכסון הקצר ביותר.



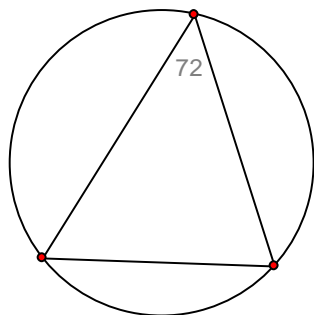
(12) ABCDE הוא מחומש המורכב ממשולש ABE וממלבן EBCD. (ראה ציור).

נתון: $BC = 2$ ס"מ, $AB = AE = 4$ ס"מ.
מצא את השטח של המחומש ששטחו מקסימלי.



(13) מתבוננים בכל המשולשים ישרי הזווית ABC החוסמים חצי מעגל שרדיוסו R כמתואר בציור.

מהן זוויות המשולש שסכום הניצבים שלו הוא מינימלי?



(14) במעגל שרדיוסו R חסומים משולשים כך שהגודל של

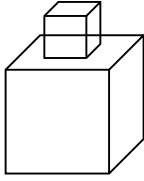
אחת הזוויות בכל אחד מהמשולשים הוא $\frac{2\pi}{5}$.

מצא את הזוויות במשולש בעל ההיקף המקסימלי.

בעיות בהנדסת המרחב

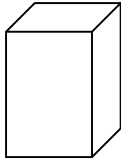
(15) גובהו של "מגדל" הבנוי שמתו קוביות) לאו דווקא

שוות) הוא 8 ס"מ. מה צריך להיות אורך המקצוע ש
הקובייה התחתונה כדי שנפח המגדל (סכום נפחי
הקוביות) יהיה מינימלי ?



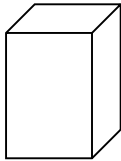
(16) בונים תיבה שגובהה y ס"מ, ובסיסה ריבוע, שאורך

צלעו x ס"מ (ראה ציור), כך שההיקף של כל אחת
מהדפנות הצדדיות שווה ל- 12 ס"מ. מה צריך להיות
אורך צלע הבסיס כדי שנפח התיבה יהיה מקסימלי?



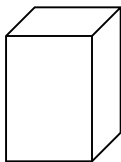
(17) יש לבנות תיבה פתוחה מלמעלה, שבסיסה ריבוע

ושטח פניה 75 סמ"ר (במקרה זה שטח הפנים מורכב
מבסיס אחד ומארבע פאות צדדיות). מכל התיבות
שאפשר לבנות, מצא את ממדי התיבה (צלע הבסיס
וגובה) שנפחה מקסימלי.



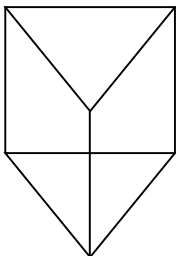
(18) יש להכין מחוט תיל "שלד" (מסגרת) של תיבה,

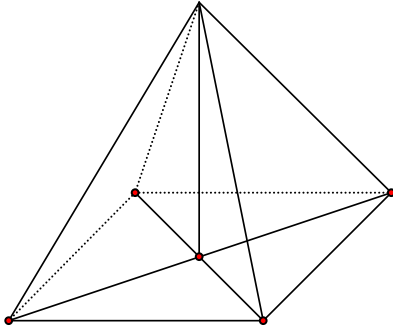
שבסיסה ריבוע ונפחה 1000 סמ"ק. מהו האורך
המינימלי של החוט הנחוץ ליצירת התיבה?



(19) מחוט שאורכו a ס"מ יש לבנות מנסרה משולשת

ישרה, שבסיסה הוא משולש שווה צלעות.
מצא איזה חלק מאורך החוט יש להקצות לצלע
הבסיס x ואיזה חלק לגובה y כדי שיתקיים:
א. שטח המעטפת של המנסרה יהיה מקסימלי.
ב. נפח המנסרה יהיה מקסימלי.





(*20) מכל הפירמידות המרובעות, המשוכללות והישרות,

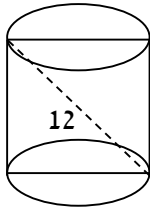
שאורך המקצוע הצדדי שלהן הוא a , מצא את נפחה

של הפירמידה בעלת הנפח המקסימלי.

(*21) מכל הפירמידות הישרות, שבסיסן ריבוע ושטח

הפנים שלהן הוא 200 סמ"ר, חשב את נפחה של

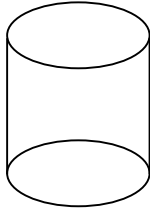
הפירמידה בעלת הנפח המקסימלי.



(22) אלכסון החתך הצירי של גליל ישר הוא 12 ס"מ (ראה

ציור). מצא מה צריכים להיות גובה הגליל ורדיוס

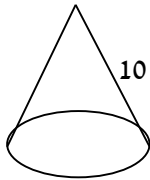
בסיסו כדי שנפחו יהיה מקסימלי.



(23) נתון מיכל גלילי פתוח מלמעלה שקיבולו 64 מ"ק.

המיכל עשוי כולו מפח. הראה כי שטח הפח הוא

מינימלי כאשר רדיוס הבסיס הוא $\frac{4}{\sqrt[3]{\pi}}$ מטר.

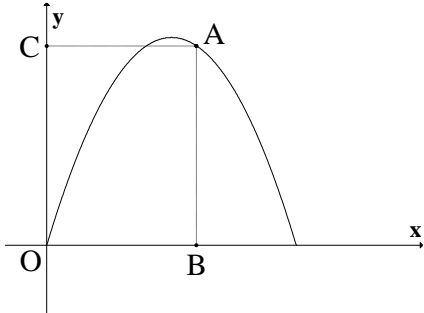


(24) מבין כל החרוטים שאורך הקו היוצר שלהם הוא 10

ס"מ (ראה ציור), מהו נפח החרוט שנפחו מקסימלי?

בעיות בפונקציות וגרפים

(25) מנקודה A, הנמצאת על גרף הפונקציה



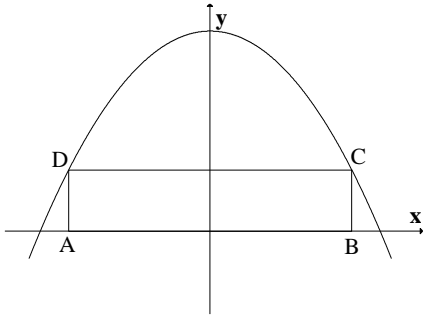
$y = -x^2 + 5x$, מורידים אנכים לצירים כך שנוצר

מלבן ABCO (ראה ציור).

א. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי שהיקף המלבן יהיה מקסימלי?

ב. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי שהיקף המלבן יהיה מינימלי?

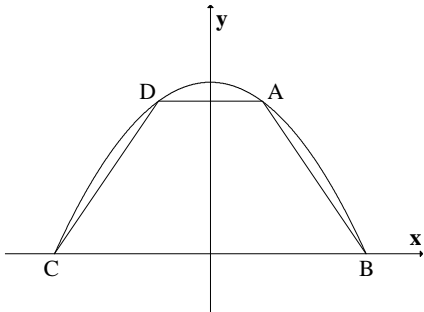
(26) בפרבולה $y = 9 - x^2$ חוסמים מלבן ABCD, כך



שהצלע AB מונחת על ציר ה-x (ראה ציור).

מה צריך להיות אורך הצלע CD כדי ששטח המלבן יהיה מקסימלי?

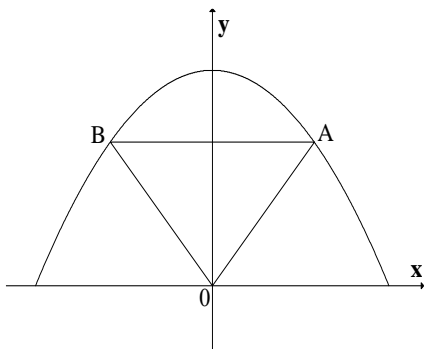
(27) טרפז ABCD חסום בין גרף הפרבולה $y = 9 - x^2$



לבין ציר ה-x (ראה ציור).

א. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי ששטח הטרפז ABCD יהיה מקסימלי?

ב. חשב את השטח המקסימלי של טרפז ABCD.



(28) נתונה הפרבולה $y = -x^2 + 12$. ישר המקביל לציר ה-

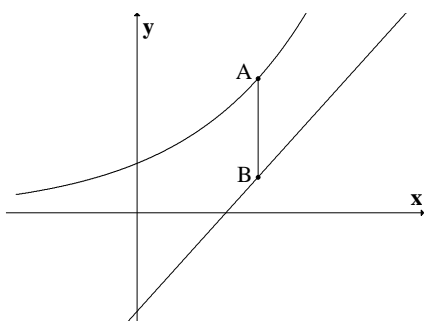
x חותך את הפרבולה בנקודות A ו-B (ראה ציור).

מתברים את הנקודות A ו-B עם ראשית הצירים, O.

א. מה צריך להיות אורך הקטע AB כדי ששטח

המשולש AOB יהיה מקסימלי?

ב. מהו השטח המקסימלי של המשולש AOB ?



(29) לפנך גרף של הפונקציה $y = e^x$ וגרף של הישר

$y = e \cdot x - 2$. ישר המקביל לציר ה-y חותך את

הגרפים בנקודות A ו-B (ראה ציור).

א. מצא לאילו ערכי x אורך הקטע AB יהיה מינימלי.

ב. האם יש ערך של x שעבורו אורך הקטע AB הוא

מקסימלי?

(30) נתונים הגרפים של שתי פרבולות :

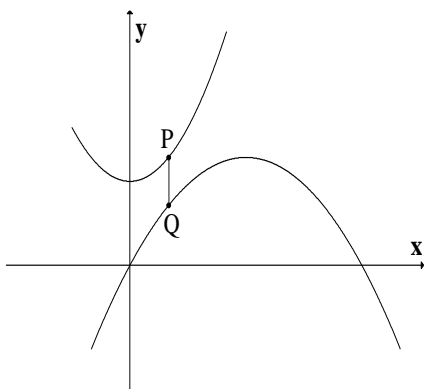
$$y = -\frac{1}{4}x^2 + 3x, \quad y = \frac{1}{2}x^2 + 7$$

קו מקביל לציר ה-y חותך את שתי הפרבולות

בנקודות P ו-Q (ראה ציור).

מבין כל הקטעים המתקבלים באופן זה, מצא את

האורך המינימלי של הקטע PQ.

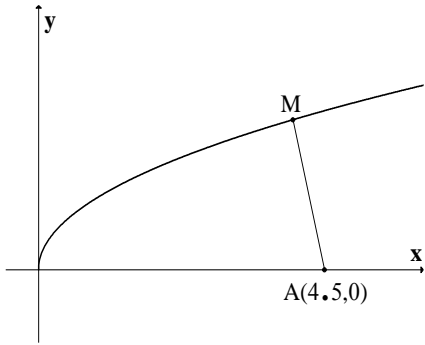


(31) נתון גרף הפונקציה $y = \sqrt{x}$. על ציר ה- x נתונה

הנקודה $A(4.5, 0)$ (ראה ציור).

מצא על גרף הפונקציה נקודה M , כך שריבוע המרחק

AM יהיה מינימלי.



(32) מצא על הישר $f(x) = 3x - 4$ את הנקודה הקרובה

ביותר לנקודה $(0, 1)$.

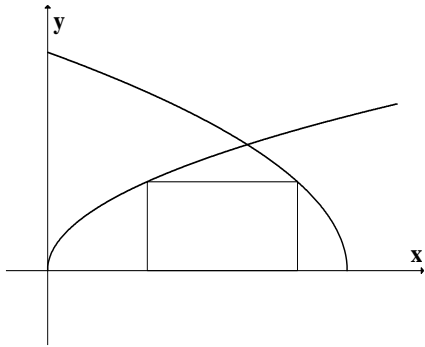
(*33) בציור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות:

$$g(x) = \sqrt{36 - 6x}, \quad f(x) = \sqrt{3x}$$

מלבן חסום בין הגרפים של הפונקציות ובין ציר ה- x ,

כמתואר בציור. מצא את השטח הגדול ביותר

האפשרי למלבן שחסום באופן זה.

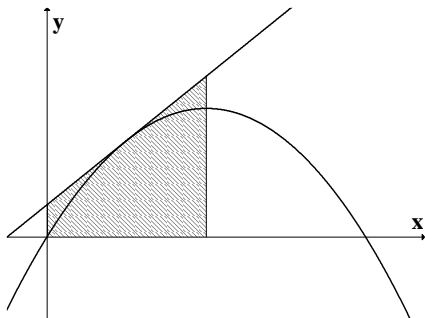


(*34) דרך איזו נקודה על הפרבולה $y = -x^2 + 2x$ צריך

להעביר משיק, כדי ששטח הטרפז, הנוצר על ידי

המשיק והישרים: $x = 1$, $x = 0$ ו- $y = 0$ (השטח

המקווקו שבציור) יהיה מינימלי?



(*35) נקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $y = x^2$ ברביע

הראשון. A היא הנקודה $(0, a)$ כאשר ידוע כי

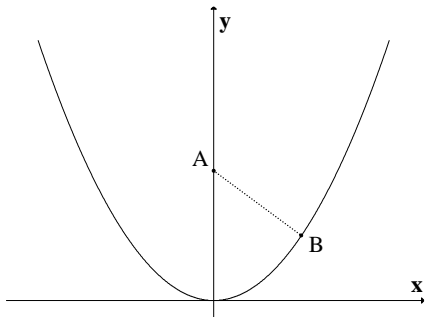
$a > 0.5$ (ראה ציור).

א. בטא באמצעות a את שיעורי הנקודה B, שעבורה

המרחק AB הוא מינימלי.

ב. מצא עבור איזה ערך של a המרחק המינימלי

הוא 2.



(*36) נתונה הפרבולה $y = x^2$, ונתון משיק לפרבולה

שמשוואתו היא $y = 6x - 9$. בנקודה (t, t^2) שעל

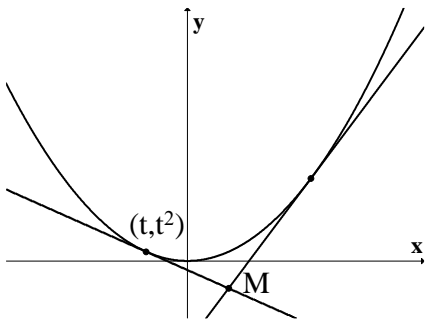
הפרבולה מעבירים משיק נוסף לפרבולה.

המשיקים נחתכים בנקודה M (ראה ציור).

א. הבע את משוואת המשיק הנוסף באמצעות t .

ב. מצא את t שעבורו אורך הקטע, המחבר את

הנקודה M עם קודקוד הפרבולה יהיה מינימלי.



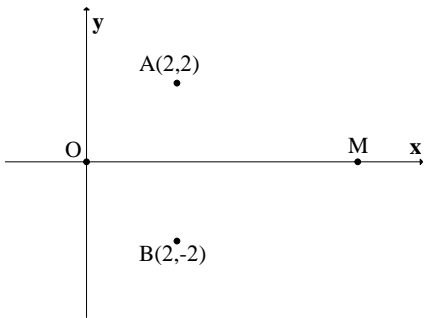
(*37) במערכת צירים נתונות הנקודות A(2, 2) ו-

$B(2, -2)$. ראשית הצירים היא בנקודה O. M היא

נקודה על ציר ה-x בתחום $x > 0$. מה צריכים להיות

שיעורי הנקודה M, כדי שהסכום $OM + MA + MB$

יהיה מינימלי?



פתרונות

- (1) $AE = 1.7_{cm}$. א. (2) $(30-x)$. ב. כל צלע שווה ל- $0.25p$. (3) $x = 3.75_{cm}$.
- (4) $AC = BC = 4_{cm}$. (5) $AB = 2\sqrt{32}_{cm}$. (6) $B = 6_{cm}, BC = 24_{cm}$. (7) אורך: 40 ס"מ
- רוחב: 15 ס"מ. (8) א. $S = x^2 - 6x + 18$. ב. $x = 3$. ב. 9 סמ"ר. (9) $AM = 5/\sqrt{2}$.
- (10) בסיס קטן R . (11) $4\sqrt{5}_{cm}$. (12) $12\sqrt{3}$ סמ"ר. (13) $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$.
- (14) $\frac{3\pi}{10}, \frac{3\pi}{10}, \frac{2\pi}{5}$. (15) 4 ס"מ. (16) 4 ס"מ. (17) צלע הבסיס: 5 ס"מ. גובה: 2.5
- ס"מ. (18) 120 ס"מ. (19) א. $x = \frac{1}{12}a, y = \frac{1}{6}a$. ב. $x = y = \frac{1}{9}a$. (20) $\frac{4\sqrt{3}}{27}a^3$.
- (21) $\frac{500}{3}$ סמ"ק. (22) גובה: $\sqrt{48}$ ס"מ. רדיוס: $\sqrt{24}$ ס"מ. (24) 403.1 סמ"ק.
- (25) א. $A(3,6)$. ב. $A(0,0)$ או $A(5,5)$. (26) $CD = 2\sqrt{3}$. א. $A(1,8)$. ב. 32 .
- (28) א. $AB = 4$. ב. $S_{\Delta AOB} = 16$. א. $x = 1$. ב. אין. (30) $PQ = 4$.
- (31) $M(4,2)$. (32) $(1.5, 0.5)$. (33) 8 . (34) $(0.5, 0.75)$.
- (35) א. $B(\sqrt{(2a-1)/2}, (2a-1)/2)$. ב. 4.25 . א. $y = 2t \cdot x - t^2$. ב. $t = -3/37$.
- (37) $M(0.845, 0)$.

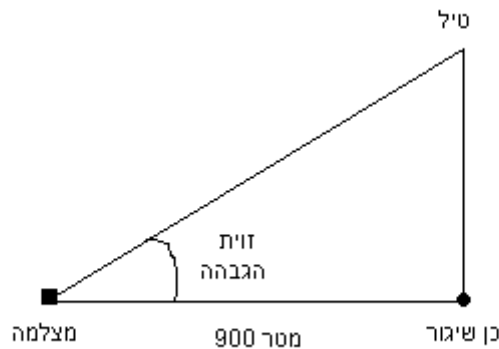
פרק 14

בעיות קצב שינוי

(1) נפט דולף ממכלית ומתפשט בצורת כתם מעגלי. רדיוס הכתם גדל בקצב קבוע של 0.5 מ' לשנייה. באיזה קצב גדל שטח הכתם כאשר הרדיוס הוא 20 מ' ?

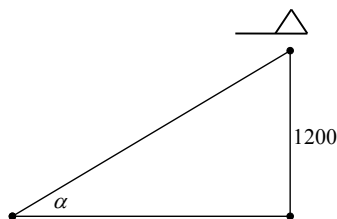
(2) סולם באורך 2.5 מ', השעון על קיר אנכי מחליק באופן כזה, שברגע שרגליו נמצאות במרחק 2 מ' מהקיר הן מתרחקות ממנו בקצב של 1 מטר לשנייה. באיזה מהירות יורד ראש הסולם לאורך הקיר ברגע זה ?

(3) מצלמה מוצבת מרחק 900 מ' מכך לשיגור טילים (ראה איור). הטיל נוסק אנכית במהירות של 260 מ' לשנייה בהיותו בגובה של 1200 מ'.
א. באיזו מהירות צריכה זווית ההגבהה של המצלמה להשתנות אז, כדי להמשיך לקלוט את דמות הטיל ?
ב. באיזה קצב משתנה אז המרחק בין המצלמה לטיל?



(4) מסננת בצורת חרוט משמשת לטיהור נוזל ממשקעים. גובה החרוט 40 ס"מ ורדיוס הבסיס שלו 10 ס"מ. כאשר גובה פני הנוזל בחרוט 20 ס"מ, הנוזל זורם מן החרוט בקצב של 30 סמ"ק לדקה. באיזה מהירות קטן גובה פני הנוזל בחרוט באותו רגע ?

(5) מטוס טס אופקית בגובה קבוע של 1200 מטר מעל לנקודת תצפית קבועה. ברגע מסוים המטוס נצפה בזווית של $\alpha = 30^\circ$. ברגע זה הזווית קטנה, ומהירות המטוס היא 480 ק"מ לשעה.
א. באיזה קצב קטנה α באותו רגע ? בטא את התוצאה במעלות לשנייה.
ב. באיזה קצב משתנה אז המרחק בין המטוס לנקודת התצפית ? בטא את התוצאה במטרים לשנייה.



(6) למוישה בלון בצורת כדור המלא באוויר. מוישה משחרר את האוויר מהבלון בקצב קבוע של 2 סמ"ק בשנייה. באיזה קצב קטן שטח פני הבלון כאשר רדיוסו הוא 3 ס"מ?

(7) נתון חרוט שרדיוס בסיסו וגובהו שווים ל- 3 ס"מ.

פותחים ברז ומים זורמים לחרוט בקצב קבוע של L סמ"ק לשנייה.

א'. הוכח כי לאחר $\frac{9\pi}{L}$ שניות החרוט יהיה מלא מים.

ב. נסמן ב- $h(t)$ את גובה פני החרוט בזמן t . מהו קצב עליית המים בחרוט כאשר

$$h(t) = 1.5_{cm} ?$$

(8) חלקיק נע לאורך עקומה שהמשוואה שלה: $\frac{xy^3}{1+y^2} = \frac{8}{5}$.

נתון שיעור ה- x של החלקיק גדל בקצב של 6 יחידות לשנייה ברגע שבו החלקיק נמצא

בנקודה $(1, 2)$.

א. באיזה קצב משתנה אזו שיעור ה- y של החלקיק.

ב. האם החלקיק עולה או יורד באותו רגע?

(9) כדור שלג שרדיוסו ההתחלתי 4 ס"מ נמס כך שהקצב שבו רדיוסו קטן פרופורציונאלי

לשטח פניו. לאחר כחצי שעה רדיוס הכדור שווה ל- 3 ס"מ.

א. רשום נוסחה שתתאר את רדיוס הכדור בזמן t .

ב. כעבור כמה זמן יהיה נפח כדור השלג $1/64$ מנפחו ההתחלתי?

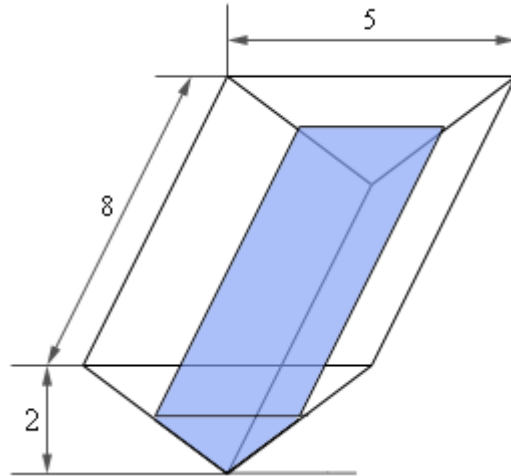
(10) מבלון מלא אוויר שרדיוסו R מתחיל לצאת אוויר. קצב יציאת האוויר הוא $-3V(t)$

כאשר $V(t)$ הוא נפח הבלון בזמן t .

הוכח כי לאחר $\ln 2$ שניות נפח הבלון יקטן לשמינית מערכו ההתחלתי.

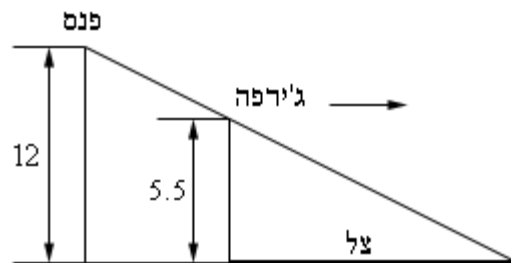
הערה: תרגילים המסומנים ב- (*) דורשים יכולת פתרון מד"ר בהפרדת משתנים

(11) נתונה שוקת מים שעומקה 8 מטרים וצורתה מנסרה משולשת שבסיסה משולשים שווי שוקיים שבסיסם 5 מ' וגובהם 2 מ' (ראה ציור). אם מים מוזרמים לשוקת בקצב קבוע של 6 מטרים מעוקבים לשנייה, באיזה קצב משתנה גובה המים כאשר גובהם 120 סנטימטרים.

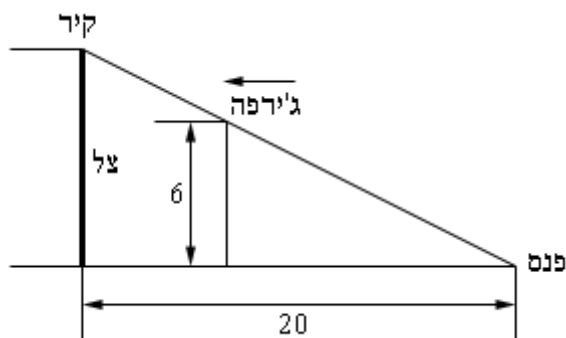


(12) פנס נמצא בראש עמוד שגובהו 12 מטר. ג'ירפה שגובהה 5.5 מטרים מתרחקת מהעמוד בקצב של 2 מטרים בשנייה.

- א. באיזה קצב מתרחק קצהו של הצל של הג'ירפה מהעמוד כאשר היא 25 מ' מהעמוד.
 ב. באיזה קצב מתרחק קצהו של הצל של הג'ירפה מהג'ירפה כאשר היא 25 מ' מהעמוד.



(13) פנס מונח על הקרקע, 20 מטרים מקיר. ג'ירפה שגובהה 6 מטרים הולכת לכיוון הקיר בקצב של 2.5 מטרים לשנייה. באיזה מהירות משתנה גובהו של הצל כאשר הג'ירפה במרחק של 8 מטרים מהקיר? האם גובה הצל קטן או גדל באותו הזמן?



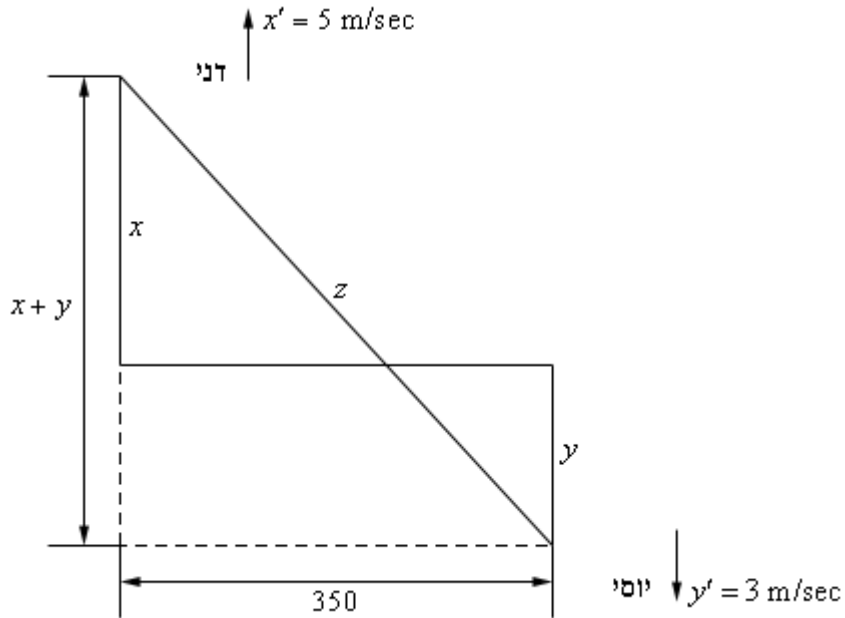
(14) דני ויוסי גרים במרחק של 350 מטרים האחד מהשני.

דני יוצא מביתו ורוכב על אופניו צפונה במהירות של 5 מטרים לשנייה. 7 דקות אחר כך יוצא

יוסי מביתו ורוכב על אופניו דרומה במהירות של 3 מטרים לשנייה.

באיזה קצב משתנה המרחק בין דני ויוסי 25 דקות לאחר שדני יצא את ביתו.

תוכל להיעזר באיור הבא :



(15) נניח שיש לנו שני נגדים המחוברים במקביל עם התנגדות R_1 ו- R_2 הנמדדת באוהם (Ω).

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \text{ . אז ההתנגדות הכוללת } R \text{ נתונה על ידי}$$

נניח ש- R_1 גדל בקצב של 0.4 אוהם בדקה ו- R_2 קטן בקצב של 0.7 אוהם בדקה.

באיזה קצב משתנה R כאשר : $R_1 = 80\Omega$, $R_2 = 105\Omega$?

פתרונות

(1) $20\pi \text{ m}^2 / \text{sec}$ (2) $-\frac{4}{3} \text{ m/sec}$ (3) א. 0.104 rad/sec ב. 208 m/sec .

(4) -0.38 cm/min (5) א. 100 Rad/hour או $-\frac{5}{\pi}$ מעלות בשנייה. ב. 115.4 m/sec .

(6) 0.75 סמ"ר בשנייה. (7) ב. $\frac{4L}{9\pi}$ (8) א. $-\frac{60}{7}$ יחידות לשנייה. ב. יורד.

(9) א. $R(t) = \frac{12}{2t+3}$ ב. $t = 4.5 \text{ hours}$ (11) 0.25 m/sec .

(12) א. 3.6923 m/sec ב. 1.6923 m/sec (13) 2.0833 m/sec (14) 7.9958 m/sec .

(15) קטן בקצב של $0.002045 \Omega / \text{min}$.

פרק 15**האינטגרל הלא מסויים (אינטגרל מיידי)**

חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{1}{x^2} dx \quad (3) \qquad \int x^4 dx \quad (2) \qquad \int 4 dx \quad (1)$$

$$\int 4x^{10} dx \quad (6) \qquad \int \frac{1}{x\sqrt{x}} dx \quad (5) \qquad \int \sqrt{x} dx \quad (4)$$

$$\int (x^2 + 1)^2 dx \quad (9) \qquad \int \left(\frac{3}{x^4} + 2\sqrt[3]{x}\right) dx \quad (8) \qquad \int (2x^2 - x + 1) dx \quad (7)$$

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx \quad (12) \qquad \int \frac{1+2x^2+x^4}{x^2} dx \quad (11) \qquad \int (x^2 + 1)(x+2) dx \quad (10)$$

$$\int \frac{4}{(x-2)^5} dx \quad (15) \qquad \int (x^2 - 2x + 1)^{10} dx \quad (14) \qquad \int (4x+1)^{10} dx \quad (13)$$

$$\int \frac{x}{(x-1)^4} dx \quad (18) \qquad \int \frac{10}{\sqrt{2x+4}} dx \quad (17) \qquad \int \sqrt[3]{4x-10} dx \quad (16)$$

$$\int \frac{1}{4x} dx \quad (21) \qquad \int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}+1} \quad (20) \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}} \quad (19)$$

$$\int \frac{1}{4x-1} dx \quad (24) \qquad \int \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 dx \quad (23) \qquad \int \frac{1+x+x^2}{x} dx \quad (22)$$

$$\int (e^{4x} + e^{-x}) dx \quad (27) \qquad \int \frac{4x+1}{x+2} dx \quad (26) \qquad \int \frac{x+3}{x+2} dx \quad (25)$$

$$\int \left(4\sqrt{e^x} + \frac{1}{\sqrt[3]{e^{4x}}}\right) dx \quad (30) \qquad \int \frac{2^x + 4^{2x} + 10^{3x}}{5^x} dx \quad (29) \qquad \int (e^{x+1})^2 dx \quad (28)$$

$$\int \frac{x^2}{1-x^2} dx \quad (33) \qquad \int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx \quad (32) \qquad \int \frac{1}{1+4x^2} dx \quad (31)$$

$$\int 2 \sin 4x + \cos x dx \quad (36) \qquad \int \sin \frac{x}{2} dx \quad (35) \qquad \int \cos 4x dx \quad (34)$$

* בדוק תשובתך על ידי גזירה!

פרק 16**האינטגרל הלא מסויים (הנגזרת כבר בפנים)**

חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{x^2}{x^3+1} dx \quad (3)$$

$$\int \cot x dx \quad (2)$$

$$\int \frac{2x}{x^2+1} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{e^{x+2}}{e^x+1} dx \quad (6)$$

$$\int \frac{1}{x \ln x} dx \quad (5)$$

$$\int \tan x dx \quad (4)$$

$$\int e^{-2x^2} x dx \quad (9)$$

$$\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx \quad (8)$$

$$\int e^{x^2} 2x dx \quad (7)$$

$$\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx \quad (12)$$

$$\int \cos(\sin x) \cdot \cos x dx \quad (11)$$

$$\int \cos(2x^2+1) \cdot 4x dx \quad (10)$$

$$\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx \quad (15)$$

$$\int \sin(x^2+1)x dx \quad (14)$$

$$\int \cos(10x^4+1)x^3 dx \quad (13)$$

$$\int \frac{\ln(\tan x)}{\cos^2 x} dx \quad (18)$$

$$\int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx \quad (17)$$

$$\int \frac{\ln x}{x} dx \quad (16)$$

$$\int \sqrt{x^2+1} \cdot 2x dx \quad (21)$$

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{2 \sin x}} dx \quad (20)$$

$$\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad (19)$$

$$\int \frac{\sqrt{\arctan x}}{1+x^2} dx$$

$$\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx \quad (23)$$

$$\int \sqrt{x^3+4} \cdot x^2 dx \quad (22)$$

* הערה : את האינטגרלים בפרק זה ניתן לפתור גם בעזרת שיטת ההצבה.

* בדוק תשובתך על ידי גזירה!

פרק 17**האינטגרל הלא מסויים (אינטגרציה בחלקים)**

(1) חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int x \sin x dx \quad (3) \quad \int x^4 \ln x dx \quad (2) \quad \int x e^x dx \quad (1)$$

$$\int x^2 \sin 4x dx \quad (5) \quad \int x \cos 2x dx \quad (4) \quad \int (x^2 + 2x + 3) \ln x dx \quad (4)$$

$$\int \ln \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx \quad (8) \quad \int \ln x dx \quad (7) \quad \int x^2 e^{-4x} dx \quad (6)$$

$$\int x \cdot \ln \sqrt[5]{x-2} dx \quad (11) \quad \int \arcsin x \quad (10) \quad \int \arctan x \quad (9)$$

$$\int x \arctan x \quad (14) \quad \int \frac{\ln x}{x^2} dx \quad (13) \quad \int \frac{x}{\cos^2 x} dx \quad (12)$$

$$\int \left(\frac{\ln x}{x} \right)^2 dx \quad (17) \quad \int \ln^2 x dx \quad (16) \quad \int x^2 \ln(x^2 + 1) dx \quad (15)$$

$$\int \sqrt{1-x^2} dx \quad (20) \quad \int e^{2x} \sin 4x dx \quad (19) \quad \int e^x \cos x dx \quad (18)$$

$$\int (x+1)^4 \cdot \sqrt{x+2} dx \quad \int x \tan^2 x dx \quad (22) \quad \int \frac{x e^x}{(x+1)^2} dx \quad (21)$$

(2) א. מצא נוסחת נסיגה עבור $\int x^n e^x dx$ באשר n טבעי. ב. חשב $\int x^4 e^x dx$.

(3) א. מצא נוסחת נסיגה עבור $\int \cos^n x dx$ באשר n טבעי. ב. חשב $\int \cos^4 x dx$.

(4) א. מצא נוסחת נסיגה עבור $\int \sin^n x dx$ באשר n טבעי. ב. חשב $\int \cos^4 x dx$.

(5) א. מצא נוסחת נסיגה עבור $\int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$ באשר n טבעי. ב. חשב $\int \frac{1}{(1+x^2)^4} dx$.

* בדוק תשובתך על ידי גזירה!

פרק 18**האינטגרל הלא מסויים (שיטת ההצבה)**

(1) חשב את האינטגרלים הבאים (הצבות רגילות):

$$\int \frac{2x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad (3) \quad \int \sqrt{x^3+4} \cdot x^5 dx \quad (2) \quad \int \frac{2x}{(x^2+1)^2} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} dx \quad (6) \quad \int \frac{1}{x \ln^4 x} dx \quad (5) \quad \int \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x(1+x)}} dx \quad (9) \quad \int e^{\sqrt[3]{x}} dx \quad (8) \quad \int e^{x^2} x^3 dx \quad (7)$$

$$\int \frac{\cos^2(\ln x)}{x} dx \quad (12) \quad \int x^3 (3x^2 - 1)^{14} dx \quad (11) \quad \int \cos(2x^2 + 1) \cdot 4x^4 dx \quad (10)$$

$$\int \frac{x^3 dx}{x^8 + 2} \quad (15) \quad \int \ln^3 x dx \quad (14) \quad \int \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} dx \quad (13)$$

$$\int \frac{dx}{x \cdot \ln x \cdot \ln(\ln x)} \quad (18) \quad \int \frac{\arctan^2 x}{1+x^2} dx \quad (17) \quad \int \frac{\ln^4 x}{x} dx \quad (16)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} dx \quad (21) \quad \int \frac{x^7}{(1-x^4)^2} dx \quad (20) \quad \int \arctan \sqrt{x} dx \quad (19)$$

$$\int x^5 \cdot \sqrt[3]{x^3+1} dx \quad (24) \quad \int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})} dx \quad (23) \quad \int \cos(\ln x) dx \quad (22)$$

הערה: בחלק מהתרגילים, לאחר ההצבה, תידרש לאינטגרציה בחלקים.

* בדוק תשובתך על ידי גזירה!

פרק 19

האינטגרל הלא מסויים (פונקציות רציונליות)

(1) חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{x+1}{(x-4)^2} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{2x+5}{(x^2-2x+1)^4} dx \quad (2)$$

$$\int \frac{dx}{x^2-4} \quad (3)$$

$$\int \frac{2-x}{x^2+5x} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{x^2+x-1}{x^3-x} dx \quad (5)$$

$$\int \frac{x}{x^2+5x+6} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{8x}{(x-2)^2(x+2)} dx \quad (8)$$

$$\int \frac{10x}{x^4-13x^2+36} dx \quad (7)$$

$$\int \frac{6x^2+4x-6}{x^3-7x-6} dx \quad (6)$$

$$\int \frac{5-x}{x^3+x^2} dx \quad (9)$$

$$\int \frac{9x+36}{x^3+6x^2+9x} dx \quad (10)$$

$$\int \frac{dx}{(x^2-2x+1)(x^2-4x+4)} \quad (11)$$

$$\int \frac{1}{x^2+2x+3} dx \quad (12)$$

$$\int \frac{2x^2+x-1}{(x^2+1)(x-3)} dx \quad (14)$$

$$\int \frac{1}{x^2+x+1} dx \quad (13)$$

$$\int \frac{2x^2+2x+1}{(x^2+1)(x+2)} dx \quad (15)$$

$$\int \frac{1}{x(x^2+1)^2} dx \quad (17)$$

$$\int \frac{3}{(x^2+1)(x^2+4)} dx \quad (16)$$

$$\int \frac{25x^2}{(x-1)(x^2+4)^2} dx \quad (18)$$

$$\int \frac{x^4+2x^3-10x^2-8x}{x+4} dx \quad (20)$$

$$\int \frac{3x^3-5x^2+4x-2}{x-1} dx \quad (19)$$

$$\int \frac{x^4-4x^2+x+1}{x^2-4} dx \quad (23)$$

$$\int \frac{x^4-2x^3+x^2+x}{(x-1)^2} dx \quad (22)$$

$$\int \frac{12x^3-11x^2+6x-1}{4x-1} dx \quad (21)$$

(2) חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x-x}} \quad (1)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}} \quad (2)$$

$$\int \frac{1}{1+\sqrt[4]{x-1}} dx \quad (3)$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2}}{x+1} dx \quad (4)$$

$$\int \sqrt{1+e^x} dx \quad (6)$$

$$\int \frac{1}{1+e^x} dx \quad (5)$$

* בדוק תשובתך על ידי גזירה!

פרק 20**האינטגרל הלא מסויים טריגונומטריים והצבות טריגונומטריות****אינטגרלים טריגונומטריים (בעזרת זהויות בלבד)**

(1) חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{1}{\sin^2 10x} dx \quad (3) \qquad \int \frac{1}{\cos^2 4x} dx \quad (2) \qquad \int (\sin 2x - 4 \cos \frac{x}{3}) dx \quad (1)$$

$$\int (\sin x + \cos x)^2 dx \quad (6) \qquad \int (\cos^4 x - \sin^4 x) dx \quad (5) \qquad \int (\cos^2 x - \sin^2 x) dx \quad (4)$$

$$\int \frac{1}{(\sin x \cos x)^2} dx \quad (9) \qquad \int \tan^2 x dx \quad (8) \qquad \int \sin x \cos x \cos 2x dx \quad (7)$$

$$\int (\sin^4 x + \cos^4 x) dx \quad (12) \qquad \int (\cos x \cos 2x + \sin x \sin 2x) dx \quad (11) \qquad \int \sin 7x \cos 5x dx \quad (10)$$

$$\int \cos^3 x dx \quad (15) \qquad \int \sin^2 4x dx \quad (14) \qquad \int \cos^2 x dx \quad (13)$$

$$\int \sin^4 2x dx \quad (18) \qquad \int \cos^4 x dx \quad (17) \qquad \int \sin^3 4x dx \quad (16)$$

$$\int \frac{\sin 2x - \cos 2x + 1}{\sin 2x + \cos 2x + 1} dx \quad (21) \qquad \int \frac{\sin 5x - \sin x}{\sin 4x - \sin 2x} dx \quad (20) \qquad \int \frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x} dx \quad (19)$$

$$\int \sin^2 x \cos^4 x dx \quad (24) \qquad \int \frac{1 + \cos^3 x}{\cos^2 \frac{x}{2}} dx \quad (23) \qquad \int \frac{\sin^3 x}{1 - \cos x} dx \quad (22)$$

אינטגרלים טריגונומטריים (בעזרת הצבה טריגונומטרית)**זכור:**

$$\int f(\sin x) \cdot \cos x dx = \int f(t) dt \quad \left. \begin{array}{l} \sin x = t \\ (x = \arcsin t) \end{array} \right|$$

$$\int f(\cos x) \cdot \sin x dx = \int f(t) (-dt) \quad \left. \begin{array}{l} \cos x = t \\ (x = \arccos t) \end{array} \right|$$

(2) חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int \cos^3 x dx \quad (3) \quad \int (\cos^3 x + \cos x - 2) \sin x dx \quad (2) \quad \int (\sin^2 x + \sin x + 2) \cos x dx \quad (1)$$

$$\int \sin^5 x \cos^4 x dx \quad (6) \quad \int \sin^4 x \cos^5 x dx \quad (5) \quad \int \sin^3 2x dx \quad (4)$$

$$\int \frac{1}{\cos x} dx \quad (9) \quad \int \tan^5 x dx \quad (8) \quad \int \cos^5 x dx \quad (7)$$

$$\int \frac{2 \sin x}{\cos 2x + 4 \cos x + 7} dx \quad (12) \quad \int \sin 2x \cdot e^{\cos x} dx \quad (11) \quad \int \frac{dx}{\sin x} \quad (10)$$

אינטגרלים טריגונומטריים (בעזרת הצבה טריגונומטרית)**זכור:**

$$\int f(\sin x, \cos x) dx = \int f\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2} dt \quad \left. \begin{array}{l} t = \tan \frac{x}{2} \\ (x = 2 \arctan t) \end{array} \right|$$

(3) חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{\cos x}{2 - \cos x} dx \quad (3) \quad \int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x} \quad (2) \quad \int \frac{1}{1 + \sin x} dx \quad (1)$$

אינטגרלים עם שורשים (בעזרת הצבה טריגונומטרית)

$$\int f(\sqrt{a^2 - x^2}) dx = \left| \begin{array}{l} x = a \sin t \\ (t = \arcsin \frac{x}{a}) \end{array} \right| = \int f(a \cos t) \cdot (a \cos t dt)$$

$$\int f(\sqrt{a^2 + x^2}) dx = \left| \begin{array}{l} x = a \tan t \\ (t = \arctan \frac{x}{a}) \end{array} \right| = \int f\left(\frac{a}{\cos t}\right) \cdot \left(\frac{a}{\cos^2 t} dt\right)$$

$$\int f(\sqrt{x^2 - a^2}) dx = \left| \begin{array}{l} x = \frac{a}{\cos t} \\ (t = \arccos \frac{a}{x}) \end{array} \right| = \int f(a \tan t) \cdot \left(\frac{-a \sin t}{\cos^2 t} dt\right)$$

(4) חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int \sqrt{4x^2 - 1} dx \quad (3)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} dx \quad (2)$$

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{4 - x^2}} \quad (1)$$

$$\int \sqrt{x^2 + 2x - 3} dx \quad (6)$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}} dx \quad (5)$$

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} \quad (4)$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 5)^{3/2}} \quad (9)$$

$$\int \frac{dx}{(4 + x^2)^2} \quad (8)$$

$$\int \sqrt{-6x - x^2} dx \quad (7)$$

* בדוק תשובתך על ידי גזירה!

תרגילים – פרק 21
האינטגרל המסוים

(1) חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int_0^1 x e^{-x} dx \quad (3) \quad \int_1^2 \frac{4x+1}{2x^2+x+5} dx \quad (2) \quad \int_1^4 (x^2 - 4x + 1) dx \quad (1)$$

$$\int_0^\pi \cos^2 10x dx \quad (6) \quad \int_1^4 \frac{1}{x^2 + 4x + 1} dx \quad (5) \quad \int_1^e \frac{\ln^4 x}{x} dx \quad (4)$$

$$\int_{-1}^4 \sqrt{4+|x-1|} dx \quad (8) \quad f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{x^2} & x \geq 1 \end{cases} \quad \text{כאשר} \quad \int_0^4 f(x) dx \quad (7)$$

(2) חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt[4]{\sin x}}{\sqrt[4]{\sin x} + \sqrt[4]{\cos x}} dx \quad (2) \quad \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx \quad (1)$$

(3) נתונה פונקציה רציפה f . הוכח :

$$\text{א. אם } f \text{ זוגית אזי } \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

$$\text{ב. אם } f \text{ אי-זוגית אזי } \int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

(4) חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int_{-4}^4 \frac{\sin x + 1}{x^2 + 1} dx \quad (2) \quad \int_{-1}^1 \frac{\cos x}{x^3 + x^5} dx \quad (1)$$

(5) הוכח את אי השוויונים הבאים :

$$2 \leq \int_0^2 e^{x^2} dx \leq 2e^4 \quad (3) \quad 6 \leq \int_{-4}^2 \sqrt{1+x^2} dx \leq 6\sqrt{17} \quad (2) \quad \frac{2}{41} \leq \int_{-1}^3 \frac{dx}{1+x^4} \leq 4 \quad (1)$$

$$\frac{\pi}{14} \leq \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+4\sin^2 x} \leq \frac{\pi}{6} \quad (6) \quad 0.9 \leq \int_3^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{\ln x}} \leq 1 \quad (5) \quad \frac{1}{2}e^{-10} < \int_0^{10} \frac{e^{-x}}{x+10} dx < 1 \quad (4)$$

$$\int_0^{\pi} x^2 \arctan\left(\frac{\sin x}{x+4}\right) dx \leq \frac{\pi^4}{6} \quad (9) \quad -\frac{1}{2} \leq \int_0^1 x \cdot \sin\left(\frac{\ln x}{x+1}\right) dx \leq \frac{1}{2} \quad (8) \quad \frac{2}{9} \leq \int_{-1}^1 \frac{dx}{8+x^3} \leq \frac{2}{7} \quad (7)$$

(6) חשב את הגבולות הבאים :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4}{n^3} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n} + \sin \frac{2}{n} + \dots + \sin \frac{n}{n}}{n} \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right\} \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \dots + \frac{n^2}{n^2+n^2} \right\} \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}} \right\} \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} + \dots + \sqrt{2n}}{n^{3/2}} \right\} \quad (6)$$

(7) חשב את האינטגרלים הבאים על פי ההגדרה (של רימן) :

$$\int_0^{\pi} \sin x dx \quad (1) \quad \int_0^1 x^3 dx \quad (3) \quad \int_0^1 x^2 dx \quad (2) \quad \int_0^1 x dx \quad (1)$$

* תוכל להיעזר בזהויות הבאות :

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = 0.5n(n + 1)$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1)$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n + 1)^2$$

$$\sin \alpha + \sin 2\alpha + \dots + \sin n\alpha = \frac{\sin \frac{n}{2} \alpha \sin \frac{n+1}{2} \alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

פרק 22**שימושי אינטגרל המסוים (שטח ואורך קשת)****חישוב שטחים**

(1) נתונות שתי פונקציות:

$$f(x) = x^2 + 4x + 6$$

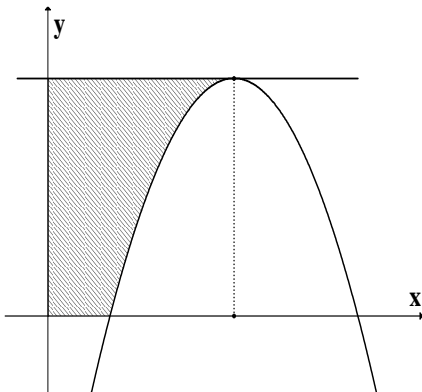
$$g(x) = x^2 - 4x + 14$$

א. מצא את נקודת החיתוך בין שתי הפונקציות.

ב. מצא את השטח המוגבל על ידי הגרפים של שתי

הפונקציות, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים

$$x = -2 \text{ ו- } x = 2 \text{ (השטח המקווקו בציור).}$$

(2) נתונה הפונקציה $y = -x^2 + 6x - 5$ (ראה ציור).

א. מצא את השיעורים של נקודת המקסימום של

הפונקציה.

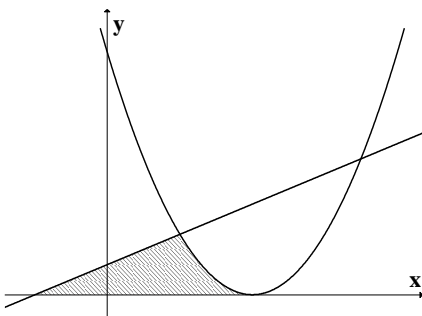
ב. מהי משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה

בנקודת המקסימום שלה?

ג. מצא את השטח המוגבל על ידי המשיק

בנקודת המקסימום, על ידי הצירים ועל ידי

גרף הפונקציה (השטח המקווקו בציור).

(3) נתונה הפונקציה $f(x) = (x-2)^2$ ונתון הישר

$$y = 0.5x + 0.5 \text{ (ראה ציור). מצא את השטח}$$

המוגבל על ידי גרף הפונקציה, הישר וציר ה- x

(השטח המקווקו בציור).

(4) נתונות הפונקציות:

$$f(x) = x^2$$

$$g(x) = -x^2 + 18$$

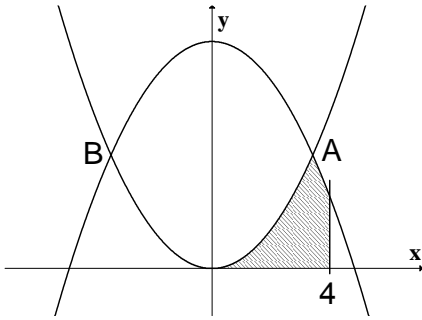
הגרפים של הפונקציות נחתכים בנקודות A ו-B

(ראה ציור).

א. מצא את שיעורי ה-x של הנקודות A ו-B.
 ב. חשב את השטח ברביע הראשון המוגבל על ידי

הגרפים של שתי הפונקציות, על ידי ציר ה-x ועל

ידי הישר $x = 4$.



(5) נתונות שתי פונקציות:

$$y = -x^2 + 3x + 2$$

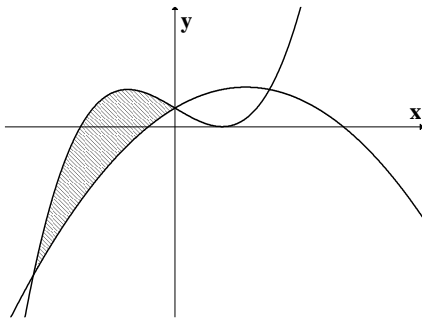
$$y = x^3 - 3x + 2$$

א. מצא את שיעורי ה-x של נקודות החיתוך בין

הגרפים של שתי הפונקציות.

ב. מצא את השטח המוגבל על ידי הגרפים של שתי

הפונקציות, השטח המקווקו בציור.

(6) נתונה הפונקציה $f(x) = -x^2 + ax$.

הפונקציה עוברת דרך הנקודה $A(2,8)$ (ראה ציור).

א. מצא את ערך הפרמטר a.

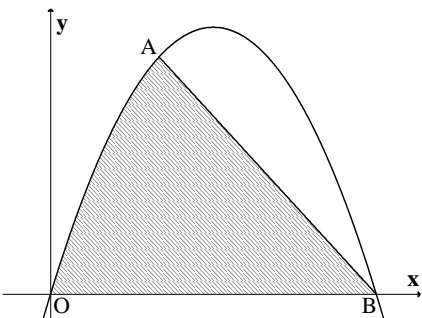
ב. הפונקציה חותכת את ציר x בנקודה $O(0,0)$

ובנקודה B. מצא את שיעורי הנקודה B.

ג. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף

הפונקציה, על ידי המיתר AB ועל ידי ציר

ה-x.

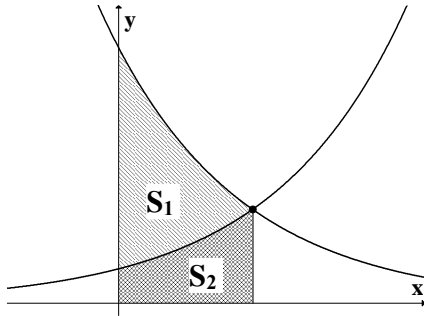


(7)

בציור שלפניך נתונות שתי הפונקציות :

$$f(x) = e^{-x+2}$$

$$g(x) = e^x$$



א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציות עם ציר y .

ב. מצא את נקודת החיתוך בין הפונקציות.

ג. חשב את היחס $\frac{S_1}{S_2}$ (ראה ציור).

(8)

נתונה הפונקציה $f(x) = e^{-2x}$.

העבירו ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה

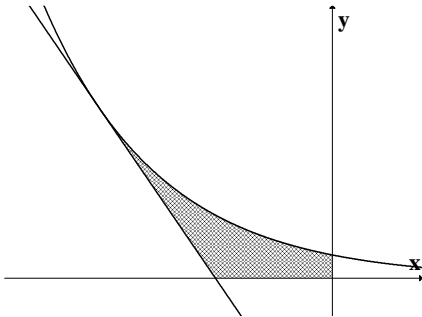
$$x = -1 \quad (\text{ראה ציור}).$$

א. מצא את משוואת המשיק.

ב. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה,

על ידי המשיק ועל ידי הצירים (השטח

המקוקו בציור).



(9)

נתונה הפונקציה $y = \cos 2x$ בתחום

$$0 \leq x \leq 4 \quad (\text{ראה ציור}).$$

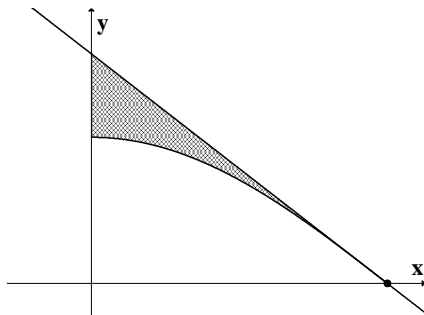
ישר משיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה

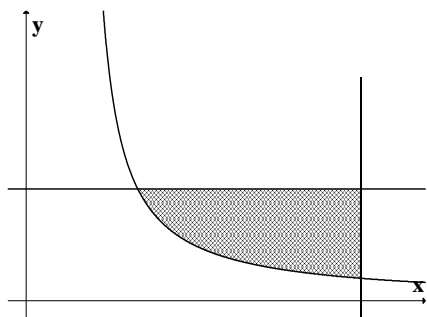
$$x = \frac{\pi}{4}.$$

א. מצא את משוואת המשיק.

ב. מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה,

על ידי המשיק ועל ידי ציר ה- y .





(10) חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה

$$y = \frac{1}{2x-1} \text{ ועל ידי הישרים } x = 3 \text{ ו- } y = 1$$

(השטח המקווקו בציור).

(11) נתונה הפונקציה $f(x) = e^{2x} - e^x$.

לפונקציה יש מינימום כמתואר בציור.

א. מצא את שיעור ה- x של נקודת המינימום של

הפונקציה.

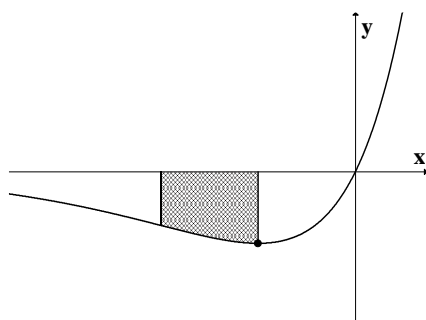
ב. מנקודת המינימום של הפונקציה העבירו אנך

לציר ה- x . נתון כי השטח, המוגבל על ידי גרף

הפונקציה, על ידי ציר ה- x , על ידי האנך ועל

ידי הישר $x = a$, שווה ל- $3e^{2a} - e^a$, כאשר

$a < \ln 0.5$. מצא את הערך של a .



(12)

נתונה הפונקציה $f(x) = e^{\frac{x+1}{2}}$ (ראה ציור).

שיפוע הישר, המשיק לגרף הפונקציה בנקודה A,

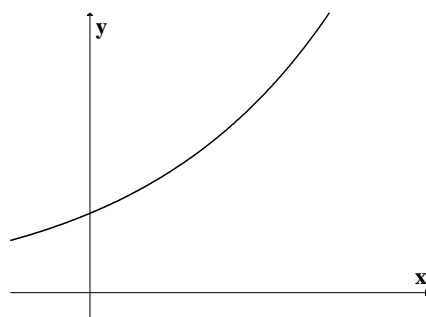
$$\frac{e^2}{2} \text{ הוא}$$

א. מצא את שיעורי הנקודה A.

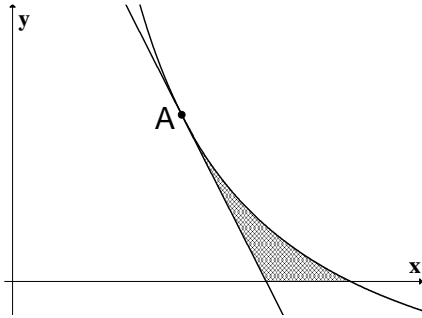
ב. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה

בנקודה A.

ג. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה,



על ידי המשיק ועל ידי ציר ה- y .



(13)

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{8}{x} - 2$ בתחום $x > 0$.

מעבירים ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה

$A(2,2)$ (ראה ציור).

א. מצא את משוואת המשיק.

ב. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה,

על ידי המשיק ועל ידי ציר ה- x (השטח המקווקו)

בציור).

(14) נתונות הפונקציות :

$$f(x) = \sin x ; 0 \leq x \leq \pi$$

$$g(x) = \cos 2x ; 0 \leq x \leq \pi$$

א. תאר במערכת צירים את הגרפים של שתי הפונקציות הנתונות.

ב. קווקו את השטח המוגבל בין הגרפים של שתי הפונקציות הנתונות וחשב את גודלו.

(15)

נתונה הפונקציה $f(x) = \operatorname{tg}^2 x$ בתחום $-\frac{\pi}{2} < x \leq 0$.

א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = -\frac{\pi}{4}$.

ב. הראה כי $\int \operatorname{tg}^2 x dx = \operatorname{tg} x - x + c$ ומצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, על ידי

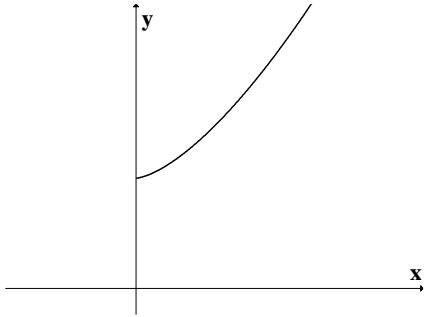
המשיק ועל ידי ציר ה- x .

(16)

דרך הנקודה $A(8,0)$ העבירו משיקים לפרבולה $y = x^2 - 10x + 25$.

א. מצא את משוואות המשיקים.

ב. חשב את השטח הכלוא בין שני המשיקים והפרבולה.



(17)

נתונה הפונקציה $f(x) = x\sqrt{x} + 4$ בתחום $x \geq 0$.

(ראה ציור)

א. מצא את משוואת הישר העובר דרך הנקודה

(0,0) ומשיק לגרף הפונקציה הנתונה.

ב. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה

הנתונה, על ידי המשיק ועל ידי ציר ה- y .(18) א. חשב את הנגזרת של הפונקציה $f(x) = \cos^3 x$.ב. חשב את השטח המוגבל על ידי ציר ה- x ועל ידי גרף הפונקציה $y = \cos^2 x \cdot \sin x$

$$\text{בתחום } \frac{1}{2}\pi \leq x \leq \frac{3}{2}\pi$$

* לסטודנטים במקצועות ריאליים, ענו על סעיף ב ללא סעיף א.

(19) חשב את השטח הכלוא בין הפרבולה $y^2 = -x$ והישר $y = x + 6$.(20) חשב את השטח הכלוא בין הפרבולה $x = y^2 + 2$ והישר $y = x - 8$.(21) חשב את האינטגרלים הבאים: א. $\int_0^a \sqrt{x^2 - a^2} dx$ ב. $\int_{-a}^a \sqrt{a^2 - y^2} dy$.**חישוב אורך עקום (קשת)**

(22) חשב את אורך העקום הנתון בסעיפים הבאים:

$$(1 \leq x \leq 2) y = \frac{x^5}{15} + \frac{1}{4x^3} \quad (3) \quad (1 \leq x \leq 8) y = x^{2/3} \quad (2) \quad (1 \leq x \leq 2) y = \frac{x^4}{8} + \frac{1}{4x^2} \quad (1)$$

$$(1 \leq x \leq 8) x^{2/3} + y^{2/3} = 4 \quad (6) \quad (0 \leq x \leq 3) y = \frac{1}{3} \sqrt{x(3-x)} \quad (5) \quad (0 \leq x \leq 3) y = \frac{2}{3} (1+x^2)^{3/2} \quad (4)$$

$$(1 \leq x \leq 2) y = x^2 \quad (9) \quad (1 \leq x \leq 2) y = \ln x \quad (8) \quad (0 \leq y \leq 4) x = 3y^{3/2} - 1 \quad (7)$$

פרק 23

שימושי אינטגרל המסוים

(חישוב נפח גוף סיבוב, שטח מעטפת של גוף סיבוב ונפח של גוף)

נפח של גוף סיבוב

(1) רשום את הנוסחאות לחישוב נפח גוף סיבוב, סביב ציר x וסביב ציר y , בשיטת הדיסקות (cavalieri) ובשיטת הקליפות הגליליות.

(2) השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $y = x^2$ ו- $y = 2x$ מסתובב סביב ציר x .

חשב את נפח הגוף המתקבל בשתי דרכים:

א. שיטת הדיסקות (cavalieri).

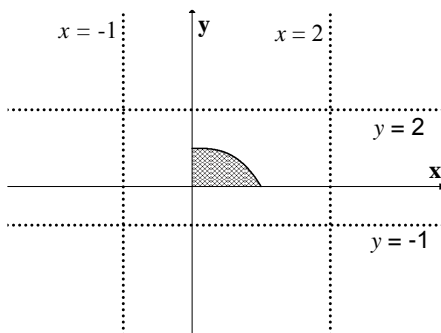
ב. שיטת הקליפות הגליליות.

(3) השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $y = x^2$ ו- $y = 2x$ מסתובב סביב ציר y .

חשב את נפח הגוף המתקבל בשתי דרכים:

א. שיטת הדיסקות (cavalieri).

ב. שיטת הקליפות הגליליות.



(4) השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x) = 1 - x^3$

והצירים מסתובב סביב:

א. ציר x . ב. הישר $y = -1$. ג. הישר $y = 2$.

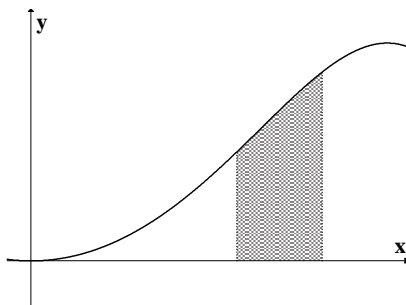
ד. ציר y . ה. הישר $x = -1$. ו. הישר $x = 2$.

מהו נפח הגוף המתקבל?

(5) נסח והוכח את הנוסחה לחישוב נפח גליל.

(6) נסח והוכח את הנוסחה לחישוב נפח חרוט.

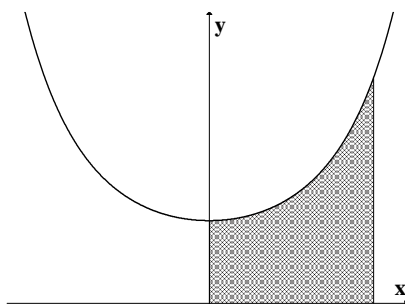
(7) נסח והוכח את הנוסחה לחישוב נפח כדור.



(8) השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $y = \sin(x^2)$

והישרים: $y = 0$, $x = \sqrt{\frac{\pi}{6}}$, $x = \sqrt{\frac{\pi}{3}}$ מסתובב

סביב ציר y . מהו נפח הגוף המתקבל.



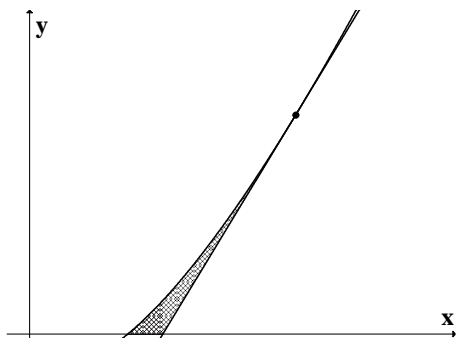
(8) השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $y = e^{-x^2}$

לפתרון מלא בסרטון וידאו היכנסו ל- **ii**

כתב ופתר - גיא סלומון

והישרים: $y = 0, x = \sqrt{\frac{\pi}{6}}, x = \sqrt{\frac{\pi}{3}}$ מסתובב

סביב ציר y . מהו נפח הגוף המתקבל.



(9) השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x) = x \ln x$,

המשיק לגרף בנקודה (e, e) וציר x מסתובב סביב

ציר x . מהו נפח הגוף המתקבל?

שטח מעטפת של גוף סיבוב

(10) רשום את הנוסחאות לחישוב שטח מעטפת של גוף סיבוב סביב ציר x וסביב ציר y .

(11) הפונקציה $y = \sqrt{4-x^2}$ עבור $-1 \leq x \leq 1$ מסתובבת סביב ציר x .

מהו שטח המעטפת של הגוף שנוצר?

(12) נסח והוכח את הנוסחא לחישוב שטח מעטפת של חרוט.

(13) נסח והוכח את הנוסחא לחישוב שטח מעטפת של כדור.

(14) הפונקציה $x = \sqrt{9-y^2}$, עבור $-2 \leq y \leq 2$ מסתובבת סביב ציר y

מהו שטח המעטפת של הגוף שנוצר?

חישוב נפח

(15) מצא נוסחה לחישוב נפח פירמידה ישרה, אשר גובהה h ובסיסה הוא ריבוע שאורך צלעו a .

(16) מצא נוסחה לחישוב נפח פירמידה שבסיסה משולש ישר זווית שניצביו a ו- b וגובהה c .

פרק 24**גזירת האינטגרל**

(1) צטט את המשפט היסודי (השני) של החדו"א.

(2) על סמך המשפט היסודי הוכח כי אם $f(x)$ רציפה ו- $a(x), b(x)$ גזירות, אזי:

$$1) I(x) = \int_a^{b(x)} f(t) dt \Rightarrow I'(x) = f(b(x))b'(x)$$

$$2) I(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t) dt \Rightarrow I'(x) = f(b(x))b'(x) - f(a(x))a'(x)$$

(3) גזור את הפונקציות הבאות:

$$I(x) = \int_{x^3}^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} \quad (4) \quad I(x) = \int_2^{x^3+x} t \ln t dt \quad (3) \quad I(x) = \int_1^{x^3} \frac{\ln t}{t^2} dt \quad (2) \quad I(x) = \int_2^x e^{-t^2} dt \quad (1)$$

(4) חשב את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x}{x-4} \int_4^x e^{t^2} dt \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \int_0^{x^2} \sin \sqrt{t} dt \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \frac{t dt}{\cos t}}{\sin^2 x} \quad (1)$$

$$(5) \text{ חקור את הפונקציה } F(x) = \int_0^x (t+1)^4 (t-1)^{10} dt \text{ לפי הפירוט הבא:}$$

תחום הגדרה, נקודות קיצון ותחומי עליה וירידה, נקודות פיתול ותחומי קמירות וקעירות.

פרק 25

פונקציות של מספר משתנים, גבולות ורציפות

(1) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות, מצא תחום הגדרה, שרטט אותו ושרטט את

מפת קווי הגובה/רמה של הפונקציה (בסעיפים 7 ו-8 תאר את משטחי הרמה).

$$f(x, y) = \ln x + \ln y \quad (2) \qquad f(x, y) = \frac{y}{x} \quad (1)$$

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad (4) \qquad f(x, y) = x^2 + y^2 \quad (3)$$

$$f(x, y) = x\sqrt{y} \quad (6) \qquad f(x, y) = \ln(x^2 - y) \quad (5)$$

$$f(x, y, z) = z^2 - x^2 - y^2 \quad (8) \qquad f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \quad (7)$$

(2) חשב את הגבולות הבאים:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (3,2)} \frac{\sin(xy - 6)}{x^2 y^2 - 36} \quad (2) \qquad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^3 y)}{x^3 y} \quad (1)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0^+)} (x^2 + y) \ln(x^2 + y) \quad (4) \qquad \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{\arctan(x + y - 3)}{\ln(x + y - 2)} \quad (3)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{\sqrt{2x + y - 3} - 1}{2x + y - 4} \quad (6) \qquad \lim_{(x,y) \rightarrow (1^+, 1^+)} \frac{\sin(\sqrt{x + 2y - 3})}{x + 2y - 3} \quad (5)$$

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,1,2)} \frac{\sin(x(y^2 + z^2))}{xy^2} \quad (8) \qquad \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{xy - y^2}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \quad (7)$$

(3) חשב את הגבולות הבאים:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} |y|^x \quad (2)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{(x^2 + y^2)^2}{x^4 + y^2} \quad (1)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x}{y} \quad (4)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 + y^2}{x^2 + y^2} \quad (3)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 y}{2x^6 + y^2} \quad (6)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \quad (5)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0}} \frac{xyz}{x^2 + y^4 + z^4} \quad (8)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(xy)}{x^2 + y^2} \quad (7)$$

(4) חשב את הגבולות הבאים:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} \frac{x-y}{x^2 + yx + y^4} \quad (2)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} \quad (1)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} \quad (4)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (3)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt[3]{x^2 + y^2}} \quad (6)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2 - x^2 y^2 + 3y^2}{x^2 + y^2} \quad (5)$$

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x^3 + y^3 + z^3}{x^2 + y^2 + z^2} \quad (8)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y \ln(x^2 + y^2) \quad (7)$$

(5) בדוק את רציפות הפונקציות הבאות בנקודה $(0,0)$.

במידה והפונקציה אינה רציפה בנקודה, האם ניתן להגדיר אותה כך שתהיה

רציפה בנקודה?

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 2 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (2)$$

פתרונות

(1) (1) $x \neq 0$, המישור ללא ציר y . (2) $x > 0, y > 0$, הרביע הראשון ללא הצירים.

(3) כל המישור. (4) $x^2 + y^2 \leq 1$, עיגול היחידה. (5) $y < x^2$

(6) $y \geq 0$, חצי המישור העליון. (7) ת.ה - כל המרחב. (8) ת.ה - כל המרחב.

(2) (1) 1 (2) $\frac{1}{12}$ (3) 1 (4) 0 (5) אינסוף (6) $\frac{1}{2}$ (7) 2 (8) 5 .

(3) בכל הסעיפים אין לפונקציה גבול. (4) (1) 0 (2) 0 (3) 0 (4) 0 (5) 3 (6) 0 (7) 0 (8) 0 .

(5) (1) הפונקציה לא רציפה. אם נגדיר $f(0,0) = 1$ הפונקציה תהיה רציפה. (2) הפונקציה רציפה.

פרק 26**נגזרות חלקיות, דיפרנציאביליות**

(1) חשב את הנגזרות החלקיות מסדר ראשון של הפונקציות הבאות:

$$f(x, y) = 4x^3 - 3x^2y^2 + 2x + 3y \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^5 \ln y \quad (2)$$

$$\text{(only } f_x) \quad f(x, y) = \frac{x^2 y^4 (\sqrt{y} + 5 \ln y)}{y^2 + 5y + y^y} \quad (3)$$

$$f(x, y) = (x^2 + y^3) \cdot (2x + 3y) \quad (4)$$

$$f(x, y) = \frac{x^2 - 3y}{x + y^2} \quad (5)$$

$$f(x, y) = \sin(xy) \quad (6)$$

$$f(x, y) = \arctan(2x + 3y) \quad (7)$$

$$f(r, \theta) = r \cos \theta \quad (8)$$

$$f(x, y, z) = xy^2z^3 \quad (9)$$

$$f(u, v, t) = e^{uv} \sin ut \quad (10)$$

(2) חשב את הנגזרות החלקיות מסדר שני של הפונקציות הבאות:

$$f(x, y) = 4x^2 - x^2y^2 + 4x + 10y \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^4 \ln y \quad (2)$$

$$f(x, y) = \sin(10x + 4y) \quad (3)$$

$$f(x, y, z) = xyz \quad (4)$$

(3) (1) חשב את הנגזרות החלקיות של הפונקציה הבאה בנקודה $(0,0)$.

(2) האם הפונקציה רציפה בנקודה $(0,0)$?

(3) האם פונקציה גזירה חלקית היא בהכרח רציפה?

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

(4) בדוק את דיפרנציאביליות הפונקציה משאלה (3) בנקודה $(0,0)$

(5) בדוק את דיפרנציאביליות הפונקציות הבאות בנקודה $(0,0)$:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{2x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & (x, y) = (0,0) \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & (x, y) = (0,0) \end{cases} \quad (2)$$

(6) בדוק את דיפרנציאביליות הפונקציה הבאה בתחום הגדרתה

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

הערת סימון:

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{\partial f}{\partial x} = f_1 & f_y &= \frac{\partial f}{\partial y} = f_2 \\ f = f(x, y) \Rightarrow f_{xx} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{11} & f_{yy} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{22} \\ f_{xy} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{12} & f_{yx} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{21} \end{aligned}$$

פתרונות

$$f_y = -6x^2y + 3 \quad f_x = 12x^2 - 6xy^2 + 2 \quad (1) \quad (1)$$

$$f_y = \frac{x^5}{y} \quad f_x = 5x^4 \ln y \quad (2)$$

$$f_x = 2x \frac{y^4(\sqrt{y} + 5 \ln y)}{y^2 + 5y + y^y} \quad (3)$$

$$f_y = 6xy^2 + 12y^3 + 3x^2 \quad f_x = 6x^2 + 6xy + 2y^3 \quad (4)$$

$$f_y = \frac{-3x + 3y^2 - 2x^2y}{(x + y^2)^2} \quad f_x = \frac{x^2 + 2xy^2 + 3y}{(x + y^2)^2} \quad (5)$$

$$f_y = \cos(xy) \cdot x \quad f_x = \cos(xy) \cdot y \quad (6)$$

$$f_y = \frac{3}{1 + (2x + 3y)^2} \quad f_x = \frac{2}{1 + (2x + 3y)^2} \quad (7)$$

$$f_\theta = -r \sin \theta \quad f_r = \cos \theta \quad (8)$$

$$f_y = 2xyz^3 \quad f_x = y^2z^3 \quad (9)$$

$$f_z = 3xy^2z^2 \quad f_u = u \cdot e^{uv} \cdot \cos ut \quad f_v = u \cdot e^{uv} \cdot \sin ut \quad f_u = e^{uv} [v \sin ut + t \cos ut] \quad (10)$$

$$f_{xx} = 8 - 2y^2 \quad f_x = 8x - 2xy^2 + 4 \quad (1) \quad (2)$$

$$f_{yy} = -2x^2 \quad f_y = -2x^2y + 10$$

$$f_{yx} = -4xy \quad f_{xy} = -4xy$$

$$f_{xx} = 12x^2 \ln y \quad f_x = 4x^3 \ln y \quad (2)$$

$$f_{yy} = -\frac{x^4}{y^2} \quad f_y = \frac{x^4}{y}$$

$$f_{yx} = \frac{4x^3}{y} \quad f_{xy} = \frac{4x^3}{y}$$

$$f_{xx} = -100 \sin(10x + 4y) \quad f_x = 10 \cos(10x + 4y) \quad (3)$$

$$f_{yy} = -16 \sin(10x + 4y) \quad f_y = 4 \cos(10x + 4y)$$

$$f_{yx} = -40 \sin(10x + 4y) \quad f_{xy} = -40 \sin(10x + 4y)$$

$$f_{xz} = y \quad f_{xy} = z \quad f_{xx} = 0 \quad f_x = yz \quad (4)$$

$$f_{yz} = x \quad f_{yy} = 0 \quad f_{yx} = z \quad f_y = xz$$

$$f_{zz} = 0 \quad f_{zy} = x \quad f_{zx} = y \quad f_z = xy$$

(3) הנגזרות החלקיות בנקודה (0, 0) שוות אפס.

(2) הפונקציה לא רציפה בנקודה (0, 0).

(3) פונקציה גזירה חלקית אינה בהכרח רציפה.

(4) לא דיפרנציאבילית.

(5) לא דיפרנציאבילית (2) דיפרנציאבילית.

(6) דיפרנציאבילית.

פרק 27

כלל השרשרת לפונקציה של מספר משתנים

* בתרגילים בפרק זה, הנח שכל הנגזרות הרשומות קיימות.

$$(1) \text{ נתון } x = 2u - v, y = u^2 + v^3, z = \ln(x^2 - y^2) \text{ חשב } z_u, z_v$$

$$(2) \text{ נתון } v = 4t + k^2, u = t^2 + 4m, z = e^{u-v} \text{ חשב } \frac{\partial z}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial m}, \frac{\partial z}{\partial k}$$

$$(3) \text{ נתון } z = f(x^2 - y^2) \text{ הוכח } y \cdot z_x + x \cdot z_y = 0$$

$$(4) \text{ נתון } z = f(xy) \text{ הוכח } x \cdot z_x - y \cdot z_y = 0$$

$$(5) \text{ נתון } z = f\left(\frac{x}{y}\right) \text{ הוכח } x \cdot z_x + y \cdot z_y = 0$$

$$(6) \text{ נתון } z = f(x - y, y - x) \text{ הוכח } z_x + z_y = 0$$

$$(7) \text{ נתון } w = f(x - y, y - z, z - x) \text{ הוכח } w_x + w_y + w_z = 0$$

$$(8) \text{ נתון } u = \sin x + f(\sin y - \sin x) \text{ הוכח } u_x \cos y + u_y \cos x = \cos x \cos y$$

$$(9) \text{ נתון } z = y \cdot f(x^2 - y^2) \text{ הוכח } \frac{1}{x} z_x + \frac{1}{y} z_y = \frac{z}{y^2}$$

$$(10) \text{ נתון } z = xy + xf\left(\frac{y}{x}\right) \text{ הוכח } x \cdot z_x + y \cdot z_y = xy + z$$

$$(11) \text{ נתון } u(x, y, z) = x^2 \cdot f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) \text{ הוכח } xu_x + yu_y + zu_z = 2u$$

$$(12) \text{ נתון } h(x, y) = f(y + ax) + g(y - ax) \text{ הוכח } h_{xx} = a^2 \cdot h_{yy}$$

$$(13) \text{ נתון } u(x, y) = f(e^x \sin y) - g(e^x \sin y)$$

$$\text{הוכח: א. } u_{xx} + u_{yy} = \frac{u_{xx} - u_x}{\sin^2 y} \quad \text{ב. } u_{xy} = u_{yx}$$

$$\text{חשב: ג. } u_{xy}(1, \pi) \text{ אם ידוע ש- } f'(0) = 2, g'(0) = 1$$

$$y = r \sin \theta, \quad x = r \cos \theta, \quad u = f(x, y) \quad \text{נתון (14)}$$

$$\cdot (u_x)^2 + (u_y)^2 = (u_r)^2 + \frac{1}{r^2} (u_\theta)^2 \quad \text{א. הוכח}$$

$$\cdot u_{rr} = f_{xx} \cos^2 \theta + 2f_{xy} \cos \theta \sin \theta + f_{yy} \sin^2 \theta \quad \text{ב. הוכח}$$

$$\cdot f_{xx} + f_{yy} = u_{rr} + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} + \frac{1}{r} u_r \quad \text{ג. הוכח}$$

(15) נתון $z = h(u, v)$ ונתון כי $u = f(x, y)$, $v = g(x, y)$ מקיימות את מישוואת

$$\cdot u_x = v_y, \quad u_y = -v_x \quad \text{קושי-רימן, כלומר מקיימות}$$

הוכח כי:

$$\cdot u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad v_{xx} + v_{yy} = 0 \quad \text{א. כלומר}$$

$$\cdot h_{xx} + h_{yy} = \left((u_x)^2 + (v_x)^2 \right) (h_{uu} + h_{vv}) \quad \text{ב.}$$

$$y = r \sinh s, \quad x = r \cosh s, \quad u = f(x, y) \quad \text{נתון (16)}$$

$$\cdot (u_x)^2 - (u_y)^2 = (u_r)^2 - \frac{1}{r^2} (u_s)^2 \quad \text{הוכח כי}$$

פתרונות

$$\cdot -e \quad \text{ג. (13)}$$

פרק 28
נגזרת מכוונת וגרדיאנט

* מומלץ בחום לעיין בנספח הוקטורים שבעמוד 71.

$$(1) \text{ תהי } f(x, y) = x^2 + y^2$$

א. חשב את הגרדיאנט של f ואת אורכו בנקודה $(3, 4)$. מהי משמעות התוצאה?

ב. הראה שהגרדיאנט הוא נורמל לקו הגובה של f העובר דרך $(3, 4)$.

$$(2) \text{ תהי } f(x, y) = 3x^2y$$

חשב את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(1, 2)$ בכיוון הוקטור $\vec{u} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$.

$$(3) \text{ תהי } f(x, y) = x - \sin(xy)$$

חשב את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(1, \pi/2)$ בכיוון הוקטור $\vec{u} = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$.

$$(4) \text{ תהי } f(x, y) = 2x^2 - 3xy + 5y^2$$

חשב את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(1, 2)$ בכיוון וקטור היחידה, היוצר

זווית של 45° עם החלק החיובי של ציר x .

$$(5) \text{ תהי } f(x, y) = xy^2$$

חשב את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(1, 3)$ בכיוון לנקודה $(4, 5)$.

$$(6) \text{ תהי } f(x, y, z) = x^2y^2z$$

חשב את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(2, 1, 4)$ בכיוון הוקטור

$$\vec{u} = 1\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

(7) אם הפוטנציאל החשמלי V בנקודה (x, y) נתון על ידי $V = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$, מצא

את קצב השינוי של הפוטנציאל בנקודה $(3, 4)$ בכיוון הנקודה $(2, 6)$.

(8) מצא את הכיוון בו הנגזרת המכוונת של הפונקציה $f(x, y) = e^x(\cos y + \sin y)$

בנקודה $(0,0)$ היא מקסימלית וחשב את ערכה.

(9) מצא את הכיוון בו הנגזרת המכוונת של הפונקציה $f(x, y, z) = 2x^3y - 3y^2z$

בנקודה $(1, 2, -1)$ היא מקסימלית וחשב את ערכה.

(10) אם הטמפרטורה נתונה על ידי $f(x, y, z) = 3x^2 - 5y^2 + 2z^2$ ואתה נמצא

בנקודה $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}\right)$ ורוצה להתקרר כמה שיותר מהר, באיזה כיוון עליך

ללכת?

הערות סימון

א. במישור R^2 : $\mathbf{i} = (1, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1)$

ולכן ניתן לסמן וקטור במישור בשתי דרכים: $\vec{u} = (x, y)$ או $\vec{u} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$

למשל, $\vec{u} = (3, 4) \Leftrightarrow \vec{u} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

במרחב R^3 : $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$

ולכן ניתן לסמן וקטור במרחב בשתי דרכים: $\vec{v} = (x, y, z)$ או $\vec{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

למשל, $\vec{u} = (3, 4, 5) \Leftrightarrow \vec{u} = 3\cdot\mathbf{i} + 4\cdot\mathbf{j} + 5\cdot\mathbf{k}$

ב. יש המסמנים וקטור גם כך \underline{u} או כך \mathbf{u} .

ג. וקטור יחידה יסומן $\hat{\mathbf{u}}$.

פתרונות

(1) א. הגרדיאנט $(6, 8)$. אורך הגרדיאנט 10.

(2) $48/5$ (3) $1/2$ (4) $7.5\sqrt{2}$ (5) $3\sqrt{13}$ (6) $88/3$

(7) $1/5\sqrt{5}$ (8) הנגזרת המכוונת מקסימלית בכיוון הוקטור $(1, 1)$ ושווה ל- $\sqrt{2}$

(9) הנגזרת המכוונת מקסימלית בכיוון הוקטור $(12, 14, -12)$ ושווה ל-22.

(10) בכיוון הוקטור $(-2, 2, -2)$.

פרק 29

פונקציות סתומות, מערכת של פונקציות סתומות, שימושים גיאומטריים

פונקציות סתומות, מערכת של פונקציות סתומות

(1) מצא את y' כאשר $x^2 + y^5 = xy + 1$. חשב את $y'(0)$.

(2) מצא את $y'(1)$ כאשר $e^{xy} + x^2y^2 = 5x - 4$.

(3) מצא את $y'(e)$, $y''(e)$ כאשר $2\ln x + \ln y = 1$.

(4) נתון $(z = z(x, y) \geq 0)$ $z^2 - e^{x^2+y^2} + (x+y)\sin z = 0$.

חשב את: $\frac{\partial z}{\partial x}(0,0)$, $\frac{\partial z}{\partial y}(0,0)$.

(5) נתון $(y = y(x, z) \geq 0)$ $z^2 - e^{x^2+y^2} + (x+y)\sin z = -e^4$.

חשב את $y_x(0,0)$, $y_z(0,0)$.

(6) נתון $(z = z(x, y) \geq 0)$ $z^3 - 2xz + y = 0$. מצא $z_{xx}(1,1)$.

(7) נתונה משוואה $z^3 - 3xyz = 4$ ונקודה $(2,1,-2)$.

מצא: (1) $z_{xx}(2,1)$ (2) $z_{xy}(2,1)$ (3) $z_{yy}(2,1)$.

(8) אם $u^2 - v = 3x + y$ ו- $u - 2v^2 = x - 2y$,

מצא את u_x, v_x, u_y, v_y .

(9) אם $w = u^3 + v^3$, $y = u^2 + v^2$, $x = u + v$, מצא את w_x, w_y .

שימושים גיאומטריים (מישור משיק וישר נורמלי למשטח)

(10) נתון משטח המוגדר ע"י הפונקציה $\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 3$ ($z < 0$).

מהי משוואת מישור משיק למשטח בנקודה P בה $x = -2, y = 1$.

(11) מצא משוואה של מישור משיק למשטח $xyz = 8$ בנקודה $(-2, 2, -2)$ וכן

משוואה של הישר הפרמטרי הניצב למשטח הנתון בנקודה זו.

(12) מצא מישור המשיק למשטח $x^2 + 8y^2 = 21 - 27z^2$ המקביל למישור

$$x + 8y + 18z = 0$$

(13) למשטח $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$ מעבירים מישור המשיק בנקודה כלשהי.

מישור זה חותך את הצירים x, y, z בנקודות A, B, C בהתאמה. נסמן

$$O = (0, 0, 0) \text{ . הוכח } OA + OB + OC = a$$

(למעשה מוכיחים שסכום הקטעים אינו תלוי בנקודת ההשקה).

פתרונות

$$y'(0) = \frac{1}{5} \quad (1)$$

$$y'(1) = 5 \quad (2)$$

$$y'(e) = -\frac{2}{e^2}, y''(e) = \frac{6}{e^3} \quad (3)$$

$$z_x(0,0) = z_y(0,0) = -\frac{\sin 1}{2} \quad (4)$$

$$y_x(0,0) = 0, y_z(0,0) = \frac{1}{2e^4} \quad (5)$$

$$z_x(1,1) = -16 \quad (6)$$

$$z_{xx}(2,1) = z_{xy}(2,1) = 1, z_{yy}(2,1) = 4 \quad (7)$$

$$u_x = \frac{1-12v}{1-8uv}, u_y = \frac{-4v-2}{1-8uv}, v_x = \frac{2u-3}{1-8uv}, v_y = \frac{-4u-1}{1-8uv} \quad (8)$$

$$w_x = -3uv, w_y = 1.5(u+v) \quad (9)$$

$$3x - 6y + 2z + 18 = 0 \quad (10)$$

$$x - y + z + 6 = 0, (-2, 2, -2) + t(1, -1, 1) \quad (11)$$

$$x + 8y + 18z = 21, x + 8y + 18z = -21 \quad (12)$$

פרק 30

נוסחת טיילור של פונקציה בשני משתנים, הדיפרנציאל השלם**נוסחת טיילור**

פתח את הפונקציות הבאות לטור טיילור עד סדר שני סביב הנקודה (a, b) :

$$(a, b) = (1, 2) \quad f(x, y) = x^2y + 3y - 2 \quad (1)$$

$$(a, b) = (0, 0) \quad f(x, y) = (1 + y) \ln(1 + x - y) \quad (2)$$

$$(a, b) = (0, 0) \quad f(x, y) = e^{4y - x^2 - y^2} \quad (3)$$

$$(a, b) = (2, 1) \quad f(x, y) = \sqrt[3]{\frac{x^2 - y}{x + y^2}} \quad (4)$$

(5) בעזרת התוצאה של תרגיל 2, חשב בקירוב את $\ln(1.5)$.

(6) בעזרת התוצאה של תרגיל 3, חשב בקירוב את e^3 .

(7) בעזרת התוצאה של תרגיל 4, חשב בקירוב את $\sqrt[3]{2}$.

הדיפרנציאל השלם

(8) מחשבים את הנפח של גליל על סמך תוצאות המדידה של רדיוסו וגובהו.

ידוע שהשגיאה היחסית במדידת הרדיוס אינה עולה על 2%,

ושהשגיאה היחסית במדידת הגובה אינה עולה על 4%.

הערך את השגיאה היחסית המקסימלית האפשרית בנפח המחושב.

(9) נתונות שתי צלעות במלבן: $a = 10_{cm}$, $b = 24_{cm}$.

חשב את השינוי המדוייק ואת השינוי המקורב (בעזרת דיפרנציאל) של אורך

אלכסון המלבן אם את הצלע a יארכו ב- 4_{mm} ואת הצלע b יקצרו ב- 1_{mm} .

(10) מודדים את האורך של תיבה, את רוחבה ואת גובהה. השגיאה היחסית בכל

מדידה אינה עולה על 5%. הערך את השגיאה היחסית המקסימלית האפשרית

באורך של אלכסון התיבה, המחושב לפי תוצאות המדידה.

(11) בעזרת הדיפרנציאל השלם, מצא בקירוב את הערך של $\sqrt[4]{15.09 + (0.99)^2}$.

פתרונות

$$f(x, y) = 6 + 4(x-1) + 4(y-2) + 2(x-1)^2 + 2(x-1)(y-2) \quad (1)$$

$$f(x, y) = x - y - \frac{1}{2}x^2 + 2xy - \frac{3}{2}y^2 \quad (2)$$

$$f(x, y) = 1 + 4y - x^2 + 14y^2 \quad (3)$$

$$f(x, y) = 1 + \frac{1}{3}(x-2) - \frac{1}{3}(y-1) - \frac{7}{81}(x-2)^2 + \frac{1}{9}(x-2)(y-1) \quad (4)$$

$$\frac{3}{8} \quad (5)$$

$$19 \quad (6)$$

$$\frac{101}{81} \quad (7)$$

$$8\% \quad (8)$$

(9) שינוי מדויק 0.06472, שינוי מקורב 0.06153.

$$.5\% \quad (10)$$

$$2\frac{7}{3200} \quad (11)$$

פרק 31

קיצון של פונקציה בשני משתנים (רמה רגילה)

עבור כל אחת מהפונקציות הבאות מצא נקודות קריטיות וסווג אותן למקסימום, מינימום או אוקף.

$$f(x, y) = 8x^3 + 12xy + 3y^2 - 18x \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20 \quad (2)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 4 \quad (3)$$

$$f(x, y) = 3x - x^3 - 2y^2 + y^4 \quad (4)$$

$$f(x, y) = e^{4y-x^2-y^2} \quad (5)$$

$$f(x, y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y \quad (6)$$

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2 - 8x + y}{xy} \quad (7)$$

$$f(x, y) = e^x \cos y \quad (8)$$

$$(9) \text{ נתון משטח } z = x^3 + y^3 - 3xy + 4$$

מצא את משוואות המישורים המשיקים האופקיים למשטח.

(10) מבין כל התיבות הפתוחות שנפחן 32 סמ"ק, חשב את ממדי התיבה ששטח

הפנים שלה הוא מינימלי.

(11) מצא את המרחק הקצר ביותר מהנקודה $(1, 2, 3)$ למישור $-2x - 2y + z = 0$

וכן את הנקודה על המישור הקרובה ביותר לנקודה הנ"ל.

(12) יצרן מוכר מחשבונים, בארץ ובסין.

עלות הייצור של מחשבון בארץ היא 6\$ ועלות ייצור מחשבון בסין היא 8\$.

מנהל השיווק עומד את הביקוש Q_1 למחשבון בארץ ואת הביקוש Q_2

למחשבון בסין על ידי:

$$Q_1 = 116 - 30P_1 + 20P_2$$

$$Q_2 = 144 + 16P_1 - 24P_2$$

כיצד צריכה החנות לקבוע את מחירי המחשבוניים, P_1 ו- P_2 , על מנת למקסם

את הרווח? מהו רווח זה?

פתרונות

- (1) $(-0.5, 1)$ אוכף; $(1.5, -3)$ מינימום.
- (2) $(1, 2)$ מינימום; $(-1, -2)$ מקסימום; $(-1, 2)$, $(1, -2)$ אוכף.
- (3) $(0, 0)$ אוכף; $(1, 1)$ מינימום.
- (4) $(-1, -1)$, $(-1, 1)$ מינימום; $(1, 0)$ מקסימום; $(-1, 0)$, $(1, 1)$, $(1, -1)$ אוכף.
- (5) $(0, 2)$ מקסימום. (6) $(4, 4)$ מקסימום.
- (7) $(-0.5, 4)$ מקסימום. (8) אין נקודות קריטיות.
- (9) $z = 3$, $z = 4$. (10) רוחב 4 ס"מ, אורך 4 ס"מ, גובה 2 ס"מ.
- (11) מרחק מינימלי הוא 1 יחידות אורך. נקודה קרובה ביותר $(1/3, 4/3, 10/3)$.
- (12) $P_1 = 10\$$, $P_2 = 12\$$, רווח מקסימלי 288\$.

פרק 32

קיצון של פונקציה של שניים/שלושה משתנים (רמה מתקדמת)**שיטת מינימום הריבועים הפחותים**

מצא את נקודות הקיצון של הפונקציות הבאות:

$$f(x, y) = 1 + 2xy - x^2 - y^2 \quad (1)$$

$$f(x, y) = 4 - \sqrt{x^2 + y^2} \quad (2)$$

$$(z = f(x, y)) \quad z^3 + z + xy - 2x - y + 2 = 0 \quad (3)$$

$$f(x, y) = x^3 - y^3 - 3x^2 + 6y^2 + 3x - 12y + 8 \quad (4)$$

$$(x, y, z > 0) \quad f(x, y, z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z} \quad (5)$$

$$(6) \quad \text{מצא מרחק מינימלי בין הפרבולה } y = x^2 + 1 \text{ לפרבולה } y = -x^2 + 2x$$

* לפתרון תרגיל זה נדרש יידע בפתרון נומרי (מקורב) של משוואה כגון שיטת ניוטון רפסון.

שיטת הריבועים הפחותים

$$(7) \quad \text{נתונות } n \text{ נקודות: } (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$$

בכל אחד מהסעיפים הבאים, מצא קו עקום מהצורה $y = h(x)$

כך שסכום ריבועי המרחקים האנכיים בין העקום והנקודות יהיה מינימלי:

$$h(x) = ax + b, \text{ הדגם עבור הנק' } (2, 2.5), (1, 0.8), (3, 3.2), (4, 3.5)$$

$$h(x) = ax^2 + bx, \text{ הדגם עבור הנק' } (-1, 2), (2, 0), (0, -2)$$

$$h(x) = ax + \frac{b}{x}, \text{ הדגם עבור הנק' } (10, 20.2), (6, 12.9), (4, 8.5), (0.5, 4)$$

$$h(x) = ax^2 + \frac{b}{x^2}, \text{ הדגם עבור הנק' } (4, 33), (2, 8.5), (0.5, 2.3), (1, 4.5), (0.1, 90)$$

$$h(x) = ax^2 + bx + c, \text{ הדגם עבור הנק' } (1, 4.5), (0.5, 2.3), (0, 0.8), (-1, 0.1), (-0.5, 0.12)$$

(8) נתונות n נקודות: $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$.

מצא ישר $y = ax + b$ כך שסכום ריבועי המרחקים האנכיים בין הישר

והנקודות יהיה מינימלי. עליך להגיע לנוסחה מפורשת עבור a ו- b .

הערה: בשאלות (7) ו-(8) ניתן להניח ש- a ו- b המתקבלים מפתרון המשוואות

נותנים את המינימום המוחלט של פונקציית ריבועי המרחקים האנכיים $f_a = 0, f_b = 0$

$$f(a, b) = \sum_{i=1}^n (h(x_i) - y_i)^2$$

פתרונות

(2) (0,0) מקסימום.

(1) (t, t) לכל t ממשי, מקסימום.

(4) אין קיצון. (1,2) אוקף.

(3) אין קיצון. (1,2) אוקף.

(6) 0.375

(5) (0.5, 1, 1) מינימום.

$$y = \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x \quad (\text{ב.7})$$

$$y = 0.88x + 0.3 \quad (\text{א.7})$$

$$y = 2.06x^2 + \frac{0.9}{x^2} \quad (\text{ד.7})$$

$$y = 2.032x + \frac{1.5039}{x} \quad (\text{ג.7})$$

$$y = 1.48x^2 + 2.196x + 0.824 \quad (\text{ה.7})$$

$$a = \frac{n \sum_{i=1}^n y_i x_i - \sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n x_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}, \quad b = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n y_i x_i \sum_{i=1}^n x_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \quad (8)$$

פרק 33

קיצון תחת אילוץ של פונקציה של שני משתנים (כופלי לגרנג')**פונקציות של שני משתנים**

מצא את המקסימום והמינימום של הפונקציות הבאות בכפוף לאילוץ הנתון:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 ; 2x^2 + 3xy = 1 - 2y^2 \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^2 - y^2 ; x^2 + y^2 = 1 \quad (2)$$

$$f(x, y) = 4x + 6y ; x^2 + y^2 = 13 \quad (3)$$

$$f(x, y) = x^2 y ; x^2 + 2y^2 = 6 \quad (4)$$

$$\text{Max}\{xy\} \quad \text{s.t.} \quad x + 3y = 12 \quad (5)$$

א. פתור את הבעיה. ב. הבא פתרון גרפי לבעיה.

$$\text{Max}\{2x + y\} \quad \text{s.t.} \quad \sqrt{x} + \sqrt{y} = 9 \quad (6)$$

א. פתור את הבעיה. ב. הבא פתרון גרפי לבעיה.

(7) מבין כל הנקודות הנמצאות על הישר $x + 3y = 12$, מצא את זו שמכפלת

שיעוריה מקסימלי.

(8) מבין כל הנקודות שעל העקומה $2x^2 + 3xy = 1 - 2y^2$ מצא את הנקודות

שמרחקיהן מראשית הצירים הוא מינימלי ואת הנקודות שמרחקן מראשית

הצירים הוא מקסימלי.

(9) מצא את המרחק הקצר ביותר מהישר $3x - 6y + 4 = 0$ לפרבולה

$$x^2 + 2xy + y^2 + 4y = 0$$

רמז: מרחק הנקודה (x_0, y_0) מהישר $ax + by + c = 0$ הוא $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

(10) מוישלה קונה בשוק x ק"ג מלפפונים ו- y ק"ג עגבניות. התועלת מצריכת הסל

$$u(x, y) = \ln x + \ln y \quad \text{נתונה על ידי } (x, y)$$

מחיר ק"ג מלפפונים 1 ש"ח. מחיר ק"ג עגבניות 2 ש"ח.

מוישלה קובע לעצמו להשיג רמת תועלת $\ln 16$ והוא מעוניין להשיג זאת

בעלות מינימאלית. נסח ופתור את בעיית מוישלה.

(11) דני קונה בשוק x ק"ג מלפפונים ו- y ק"ג עגבניות. התועלת מצריכת הסל

$$u(x, y) = xy \quad \text{נתונה על ידי } (x, y)$$

מחיר ק"ג מלפפונים 1 ש"ח. מחיר ק"ג עגבניות 3 ש"ח.

לדני תקציב של 12 ש"ח. נסח ופתור את בעיית דני.

(12) עקומת התמורה בין מנגו X ואננס Y היא $x^2 + y^2 = 13$.

$$f(x, y) = 4x + 6y \text{ לדני תועלת } y$$

דני מחפש את הסל (אננס, מנגו) (x, y) , על עקומת התמורה, המביא

למקסימום את התועלת שלו מצריכת מנגו ואננס. נסח ופתור את הבעיה.

(13) לייצרן פונקציית ייצור $Q = \sqrt{k} + \sqrt{L}$. המחירים ליחידת K ו-L הם

$P_K = 2, P_L = 1$. היצרן נמצא ברמת תפוקה 100 והוא מחפש את הצירוף

(K^*, L^*) המביא למינימום את העלות. נסח את בעיית היצרן (אל תפתור).

פתרונות

$$\begin{array}{llll} \text{Max}(0, \pm 1) & \min(\pm 1, 0) & (2) & \text{Max}(\pm 1, \mp 1) \quad \min(\pm\sqrt{1/7}, \pm\sqrt{1/7}) & (1) \\ \text{Max}(\pm 2, 1) & \min(\pm 2, 1) & (4) & \text{Max}(2, 3) & \min(-2, -3) & (3) \\ & \text{Max}(9, 36) & (6) & & \text{Max}(6, 2) & (5) \\ \text{Max}(\pm 1, \mp 1) & \min(\pm\sqrt{1/7}, \pm\sqrt{1/7}) & (8) & & (6, 2) & (7) \\ & \min(\sqrt{32}, \sqrt{8}) & (10) & & 7 / \sqrt{45} & (9) \\ & \text{Max}(2, 3) & (12) & & \text{Max}(6, 2) & (11) \\ & & & \min\{2K + L\} & ; \sqrt{K} + \sqrt{L} = 100 & (13) \end{array}$$

פרק 34

קיצוץ תחת אילוצים של פונקציה של שלושה משתנים (כופלי לגרנג')**פונקציות של שלושה משתנים תחת אילוץ**

(1) מבין כל התיבות הפתוחות שנפחן 32 סמ"ק, חשב את ממדי התיבה ששטח הפנים שלה הוא מינימלי.

(2) מצא על פני הכדור $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ את הנקודות הקרובות ביותר

לנקודה $(1, 2, 2)$ ואת הנקודות הרחוקות ביותר מהנקודה $(1, 2, 2)$.

(3) א. מצא את המרחק הקצר ביותר מהנקודה $(1, 2, 3)$ למישור $-2x - 2y + z = 0$.

ב. מצא נק' על המישור $-2x - 2y + z = 0$ שהיא הקרובה ביותר לנק' $(1, 2, 3)$.

ג. בדוק תשובתך ע"י חישוב המרחק בעזרת הנוסחה למרחק בין נקודה למישור.

(4) מצא את הנקודות על המשטח $z^2 = xy + 1$ הקרובות ביותר לראשית.

(5) מצא את המרחק הגדול ביותר והקטן ביותר מהאליפסואיד $\frac{x^2}{96} + y^2 + z^2 = 1$

למישור $3x + 4y + 12z = 288$.

רמז: מרחק הנקודה (x_0, y_0, z_0) מהמישור $ax + by + cz + d = 0$ הוא

$$\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

פונקציות של שלושה משתנים תחת אילוצים

(6) מצא מרחק מינימלי ומקסימלי בין העקום המתקבל מחיתוך הגליל $x^2 + y^2 = 1$

והמישור $z = x + y$ לבין ראשית הצירים.

(7) מצא מרחק מינימלי ומקסימלי בין העקום המתקבל מחיתוך האליפסואיד

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{25} = 1 \quad \text{והמישור } z = x + y \quad \text{לבין ראשית הצירים.}$$

הערה חשובה

בפתרון מרבית התרגילים בפרק זה, אנו מסיקים שנקודה קריטית היא נקודת קיצון משיקולים פסיקליים או גיאומטריים היות ומדובר בבעיות מעשיות. ישנן דרכים מתמטיות מתקדמות להוכיח פורמלית, אך מאחר ולא נהוג ללמד אותן ברוב מוסדות הלימוד, הסתפקנו בכך.

פתרונות

- (1) רוחב 4 ס"מ , אורך 4 ס"מ , גובה 2 ס"מ .
- (2) הנקודה הקרובה ביותר היא הנקודה (2, 4, 4) .
- הנקודה הרחוקה ביותר היא הנקודה (-2, -4, -4) .
- (3) מרחק מינימלי הוא 1 יחידות אורך. נקודה קרובה ביותר $(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{10}{3})$.
- (4) (0, 0, 1) , (0, 0, -1)
- (5) מרחק קצר ביותר $\frac{256}{13}$. מרחק ארוך ביותר $\frac{320}{13}$.
- (6) מרחק מינימלי 1 . מרחק מקסימלי $\sqrt{3}$.
- (7) מרחק מינימלי $\frac{75}{17}$. מרחק מקסימלי 10.

פרק 35

קיצון מוחלט של פונקציה רציפה בקבוצה סגורה וחסומה

(1) חשב את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של

$$f(x, y) = 3xy - 6x - 3y + 7 \text{ בתחום } R, \text{ כאשר } R \text{ הוא התחום הסגור, בצורת}$$

$$\text{משולש שקודקודיו הם: } (0, 5), (3, 0), (0, 0).$$

(2) חשב את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של

$$f(x, y) = x^2 - 3y^2 - 2x + 6y \text{ בתחום } R, \text{ כאשר } R \text{ הוא התחום הסגור, בצורת}$$

$$\text{ריבוע שקודקודיו הם } (2, 0), (2, 2), (0, 2), (0, 0).$$

(3) חשב את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x \text{ בתחום } R, \text{ כאשר } R \text{ הוא העיגול } x^2 + y^2 \leq 4.$$

(4) חשב את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y \text{ בתחום } R, \text{ כאשר } R \text{ הוא התחום הסגור,}$$

$$R = \{(x, y) \mid x + y \geq -3, x \leq 0, y \leq 0\}.$$

(5) חשב את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 12x + 16y \text{ בתחום } R, \text{ כאשר } R \text{ הוא התחום הסגור,}$$

$$R = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, 3x \geq -y\}.$$

פתרונות

(1) מקסימום מוחלט 7. מינימום מוחלט -11.

(2) מקסימום מוחלט 3. מינימום מוחלט -1.

(3) מקסימום מוחלט $\frac{33}{4}$. מינימום מוחלט $-\frac{1}{4}$.

(4) מקסימום מוחלט 6. מינימום מוחלט -1.

(5) מקסימום מוחלט $1 + 6\sqrt{10}$. מינימום מוחלט $1 - 6\sqrt{10}$.

נוסחאות – גבולות

	$x \rightarrow -\infty$	$x \rightarrow 0$	$x \rightarrow \infty$
$y = \frac{1}{x}$	$\frac{1}{-\infty} = 0$	$\frac{1}{0^+} = \infty, \frac{1}{0^-} = -\infty$	$\frac{1}{\infty} = 0$
$y = e^x$	$e^{-\infty} = 0$	$e^0 = 1$	$e^\infty = \infty$
$y = \ln x$	---	$\ln(0^+) = -\infty$	$\ln(\infty) = \infty$
$y = \arctan x$	$\text{atan}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$	$\text{atan}(0) = 0$	$\text{atan}(\infty) = \frac{\pi}{2}$
$y = a^x, a > 1$	$a^{-\infty} = 0$	$a^0 = 1$	$a^\infty = \infty$
$y = a^x, 0 < a < 1$	$a^{-\infty} = \infty$	$a^0 = 1$	$a^\infty = 0$
$y = \sin x$	---	$\sin 0 = 0$	---
$y = \cos x$	---	$\cos 0 = 1$	---
$y = \frac{\sin x}{x}$	0	1	0
$y = \frac{\tan x}{x}$	---	1	---
$y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$	e	(from right) 1	e
$y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$	---	e	1
$y = \sqrt{x}$	---	$\sqrt{0^+} = 0$	$\sqrt{\infty} = \infty$
$y = \sqrt[3]{x}$	$-\infty$	$\sqrt[3]{0} = 0$	$\sqrt[3]{\infty} = \infty$

Defined Limits:

 $\infty \cdot \infty = \infty, \quad \infty(-\infty) = -\infty, \quad \infty + \infty = \infty, \quad \infty \pm a = \infty, \quad \infty \cdot (\pm a) = \pm\infty, \quad \infty / (\pm a) = \pm\infty$

Undefined Limits :

 $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$

נוסחאות – נגזרות

1. $y = a \rightarrow y' = 0$
2. $y = f^n \rightarrow y' = n \cdot f^{n-1} \cdot f'$
3. $y = e^f \rightarrow y' = e^f \cdot f'$
4. $y = a^f \rightarrow y' = a^f \cdot f' \cdot \ln a$
5. $y = \ln f \rightarrow y' = \frac{1}{f} \cdot f'$
6. $y = \sin f \rightarrow y' = \cos f \cdot f'$
7. $y = \cos f \rightarrow y' = -\sin f \cdot f'$
8. $y = \tan f \rightarrow y' = \frac{1}{\cos^2 f} \cdot f'$
9. $y = \cot f \rightarrow y' = -\frac{1}{\sin^2 f} \cdot f'$
10. $y = \arcsin f \rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-f^2}} \cdot f'$
11. $y = \arccos f \rightarrow y' = -\frac{1}{\sqrt{1-f^2}} \cdot f'$
12. $y = \arctan f \rightarrow y' = \frac{1}{1+f^2} \cdot f'$
13. $y = \operatorname{arccot} f \rightarrow y' = -\frac{1}{1+f^2} \cdot f'$
14. $y = \sinh f \rightarrow y' = \cosh f \cdot f'$
15. $y = \cosh f \rightarrow y' = \sinh f \cdot f'$
16. $y = \tanh f \rightarrow y' = \frac{1}{\cosh^2 f} \cdot f'$
17. $y = \operatorname{coth} f \rightarrow y' = -\frac{1}{\sinh^2 f} \cdot f'$
18. $y = f(x)^{g(x)} \rightarrow y' = f(x)^{g(x)} \cdot (g(x) \cdot \ln(f(x)))'$

נוסחאות – אינטגרלים

$$\int adx = ax + c$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int k^x dx = \frac{k^x}{\ln k} + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \tan x dx = -\ln |\cos x| + c$$

$$\int \cot x dx = \ln |\sin x| + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$$

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln |ax+b| + c$$

$$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + c$$

$$\int k^{ax+b} dx = \frac{1}{a} \frac{k^{ax+b}}{\ln k} + c$$

$$\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + c$$

$$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + c$$

$$\int \tan(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \ln |\cos(ax+b)| + c$$

$$\int \cot(ax+b) dx = \frac{1}{a} \ln |\sin(ax+b)| + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + c$$

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln \left| \frac{1}{\cos x} + \tan x \right| + c$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \left(\frac{x}{a} \right) + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \left(\frac{x}{a} \right) + c$$

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln \left| \frac{1}{\sin x} - \cot x \right| + c$$

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + c$$

$$\int \frac{f'}{f} dx = \ln |f| + c$$

$$\int e^f \cdot f' dx = e^f + c$$

$$\int \sin f \cdot f' dx = -\cos(f) + c$$

$$\int \sqrt{f} \cdot f' dx = \frac{2}{3} f^{\frac{3}{2}} + c$$

$$\int f \cdot f' dx = \frac{1}{2} f^2 + c$$

$$\int \cos f \cdot f' dx = \sin(f) + c$$

$$\int \frac{f'}{\sqrt{f}} dx = 2\sqrt{f} + c$$

$$\int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx$$

נוסחאות – טריגו

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\begin{cases} \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \\ \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \\ \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)) \\ \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) \\ \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x = \sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2\pi k \\ x = (\pi - \alpha) + 2\pi k \end{cases} \\ \cos x = \cos \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2\pi k \\ x = -\alpha + 2\pi k \end{cases} \\ \tan x = \tan \alpha \Rightarrow x = \alpha + \pi k \\ \cot x = \cot \alpha \Rightarrow x = \alpha + \pi k \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = \pi k \\ \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k \end{cases}$$

נוסחאות – אלגברה

$$\left\{ \begin{array}{l} (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \\ (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\ (a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\ (a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab \\ a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \\ a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 + b^2 - ab) \\ a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + b^2 + ab) \\ a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 \\ a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a^m a^n = a^{m+n} \\ \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \\ (a^m)^n = a^{mn} \\ (ab)^n = a^n b^n \\ \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \\ a^0 = 1 \\ a^{-n} = \frac{1}{a^n} \\ \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}, \quad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \\ a^x = b \Rightarrow x = \ln b \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} a > 0, b > 0 \\ \ln a + \ln b = \ln ab \\ \ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b} \\ \ln 1 = 0, \ln e = 1 \\ \ln e^n = n \\ \ln x^n = n \ln x \quad (x > 0) \\ e^{\ln x} = x \\ a^b = e^{b \ln a} \\ \ln x = k \Rightarrow x = e^k \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c \\ \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} |a| = \sqrt{a^2} = \begin{cases} a & \text{if } a \geq 0 \\ -a & \text{if } a < 0 \end{cases} \\ |a \cdot b| = |a| \cdot |b| \\ \frac{|a|}{|b|} = \frac{|a|}{|b|} \\ |x| < a \Leftrightarrow -a < x < a \\ |x| > a \Leftrightarrow x < -a \text{ or } x > a \end{array} \right.$$

נוסחאות - טורי מקלורן של פונקציות חשובות

<u>טור מקלורן</u>	<u>תחום התכנסות</u>
$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$	$-\infty < x < \infty$
$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$	$-\infty < x < \infty$
$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$	$-\infty < x < \infty$
$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$	$-1 < x \leq 1$
$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$	$-1 \leq x \leq 1$
$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x^1 + x^2 + x^3 + \dots$	$-1 < x < 1$
$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1) \cdot \dots \cdot (m-n+1)}{n!} x^n$	$-1 \leq x \leq 1 \quad (m > 0)$
	$-1 < x \leq 1 \quad (-1 < m < 0)$
$= 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \dots$	$-1 < x < 1 \quad (m \leq -1)$
	$m \neq 0, 1, 2, 3, \dots$